知的好奇心をくすぐる(!?)教材30

『自然数の立方の和の図形的意味』

自然数の立方の和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2$$

について考えます。

公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2$ について、

- ● $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^4-k^4\right\} = 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$ と

  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n}{2}(n+1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1 = n$ から導く方法

- ● $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\{k(k+1)\}^2-\{(k-1)k\}^2\right]$ から導く方法　　などがあります。

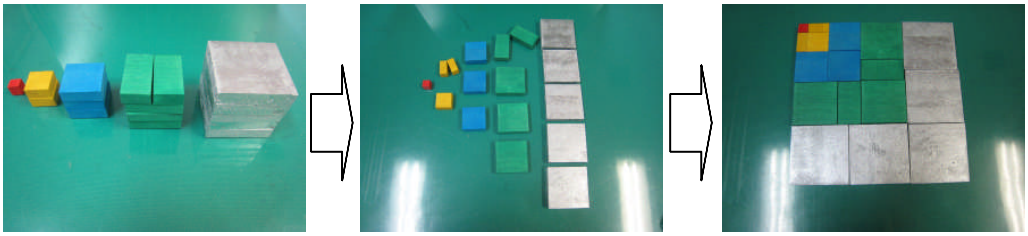
各自で導いてください。

●**図形的**に考えてみます。

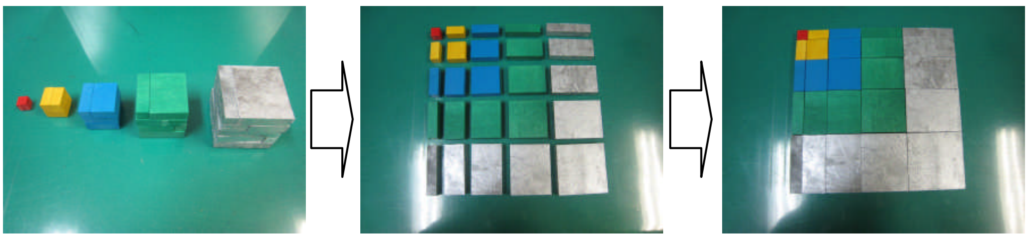
【図形的な考え方その１】

体積の和が $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ の積み木を移動させて、正四角柱（高さ １ ）を作ります。

その１



その２



これらの結果から何が分かりますか？

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2$$

※　一般化などの解説は省略しますが、写真を見て各自で考えてください。

※　このような遊びや操作活動をすることによって、図形的な感覚が養われるのではないでしょうか？

【図形的な考え方その２】

★平成20年度　愛媛県総合教育センターの研究紀要
「算数・数学における知識・技能を活用する力を育てる教材の研究
－小・中・高等学校の縦断的な「つまずき」要因の分類を通して－　」
の２(3) に掲載している内容と一部重複します。

★平成22年度に行われた第50回愛媛県高等学校教育研究大会数学部会の研究発表要項51ページに、第92回全国算数・数学教育研究(新潟)大会記念講演で、古藤怜氏（上越教育大学名誉教授）が「豊かな発想をはぐくむための実践例の１つ」として示されたことと関連のある内容です。

掛け算九九表にある 81 個の数の総和を、下図のように面積を利用して考えます。

	1 1	2 2 3	3 4 5 6	4 7 8 9 10	5 11 12 13 14 15	6 16 17 18 19 20 21	7 22 23 24 25 26 27 28	8 29 30 31 32 33 34 35 36	9 37 38 39 40 41 42 43 44 45
1 1	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	1×7	1×8	1×9
2 2 3	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7	2×8	2×9
3 4 5 6	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	3×7	3×8	3×9
4 7 8 9 10	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5	4×6	4×7	4×8	4×9
5 11 12 13 14 15	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	5×6	5×7	5×8	5×9
6 16 17 18 19 20 21	6×1	6×2	6×3	6×4	6×5	6×6	6×7	6×8	6×9
7 22 23 24 25 26 27 28	7×1	7×2	7×3	7×4	7×5	7×6	7×7	7×8	7×9
8 29 30 31 32 33 34 35 36	8×1	8×2	8×3	8×4	8×5	8×6	8×7	8×8	8×9
9 37 38 39 40 41 42 43 44 45	9×1	9×2	9×3	9×4	9×5	9×6	9×7	9×8	9×9

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45^2 = 2025$$

つまり、**掛け算九九表にある 81 個の数の総和**は、$\left(\sum_{k=1}^{9} k\right)^2$　です。　・・・①

これに対して、**掛け算九九表にある 81 個の数の総和**を、下図のようにカギ型に群（色ごと）に分けて考えます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

群の名前

1: $1 = 1 = 1^3$

2: $2+4+2 = 8 = 2^3$

3: $3+6+9+6+3 = 27 = 3^3$

4: $4+8+12+16+12+8+4 = 64 = 4^3$

5: $5+10+15+20+25+20+15+10+5 = 125 = 5^3$

6: $6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6 = 216 = 6^3$

7: $7+14+21+28+35+42+49+42+35+28+21+14+7 = 343 = 7^3$

8: $8+16+24+32+40+48+56+64+56+48+40+32+24+16+8 = 512 = 8^3$

9: $9+18+27+36+45+54+63+72+81+72+63+54+45+36+27+18+9 = 729 = 9^3$

n: $1\cdot n + 2\cdot n + \cdots + (n-2)\cdot n + (n-1)\cdot n + n^2 + n\cdot(n-1) + n\cdot(n-2) + \cdots + n\cdot 2 + n\cdot 1$

$$= n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)n$$

$$= n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}(n^2 - nj)$$

$$= n^2 + 2n^2(n-1) - 2n\sum_{j=1}^{n-1} j$$

$$= n^2 + 2n^3 - 2n^2 - 2n \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^3$$

したがって、第 n 群に含まれる数の和は n^3 なので、

掛け算九九表にある 81 個の数の総和は、$\displaystyle\sum_{k=1}^{9} k^3$ です。・・・②

よって、①, ②から $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{9} k\right)^2$

つまり、$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}$ ⇒ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2}$ が成り立つと予想できます。

※　一般化などの解説は省略しますが、各自で考えてください。

この他にも、問題や式等の図形的意味を考えてみませんか？