知的好奇心をくすぐる(!?)教材29

『自然数の平方の和の図形的意味』

自然数の平方の和

$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$　について考えます。

公式　$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$　について、

- $\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^3-k^3\right\} = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$ と $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n}{2}(n+1)$， $\sum_{k=1}^{n}1 = n$ から導く方法
- $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} - \sum_{k=1}^{n}k$ と $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n}{2}(n+1)$ から導く方法
- $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(2k+1)-(k-1)k(2k-1)\}$ から導く方法　　などがあります。

各自で導いてください。

- $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{\sum_{k=1}^{n}k}$ とおくと、　$\{a_n\}: \frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{14}{6}, \frac{30}{10}, \frac{55}{15}, \cdots\cdots$　つまり　$\{a_n\}: \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \cdots\cdots$

となるので、$a_n = \dfrac{2n+1}{3}$　と推定できます。

よって、$\sum_{k=1}^{n}k^2 = a_n\sum_{k=1}^{n}k$　から　$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{2n+1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$　という関係式が推定できます。

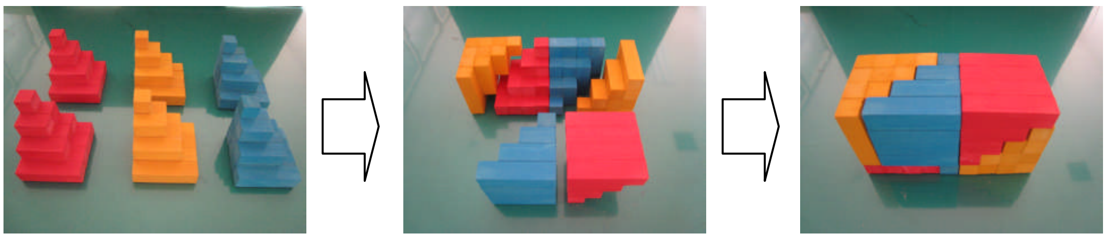
$\sum_{k=1}^{n}k^2$ が未習のときに、このようにして $\sum_{k=1}^{n}k^2$ と $\sum_{k=1}^{n}k$ の関係を見つけさせて、$\sum_{k=1}^{n}k^2$ の式を予想させ、その後に予想した $\sum_{k=1}^{n}k^2$ の式が正しいかを証明するという授業展開も考えられると思います。

●**図形的**に考えてみます。

【図形的な考え方その１】

６個の積み木を合体させて直方体を作ります。すると、

（ｉ）体積が（$1^2+2^2+3^2+4^2$）の積み木を６個合体させる場合



（ii）体積が（$1^2+2^2+3^2$）の積み木を６個合体させる場合

（ⅲ）体積が（1^2+2^2）の積み木を６個合体させる場合

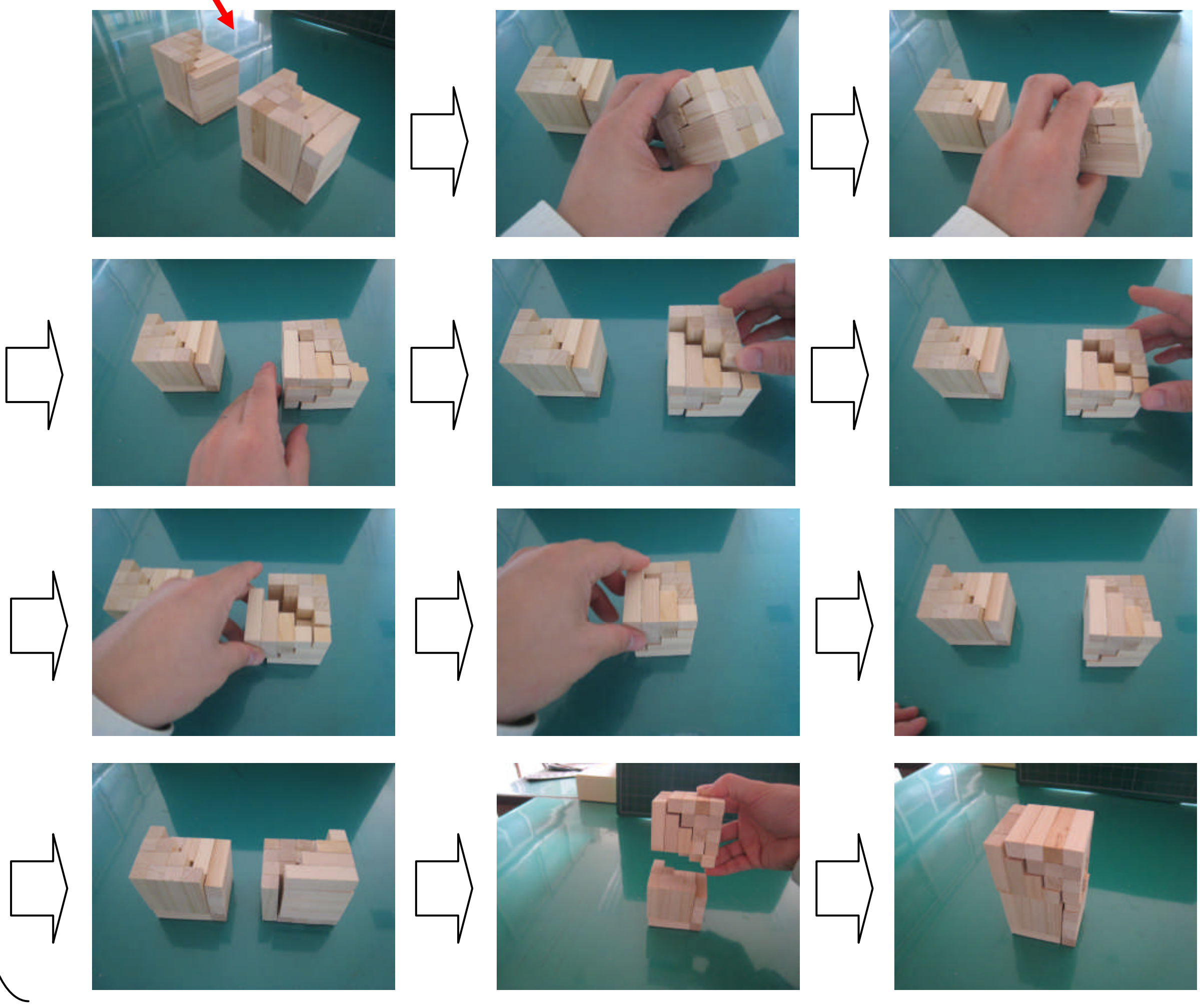
（ⅳ）体積が 1^2 の積み木を６個合体させる場合

この結果から何が分かりますか？

$$\boxed{6\sum_{k=1}^{n}k^2=n(n+1)(2n+1)}$$

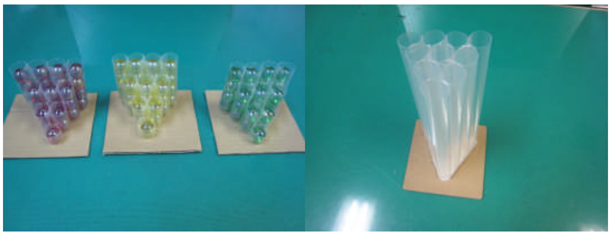
※　一般化などの解説は省略しますが、$2n+1=n+(n+1)$ であることなども考えて、各自で考察してください。

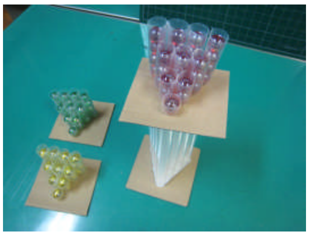
体積（$1^2+2^2+3^2+4^2$）の積み木を６個合体させて直方体を作るとき、この写真のような合体のしかたをした（３個を合体させた２つの立体が同じ形で、その２つの立体を合体させても直方体にならない）場合、以下の写真のように操作すれば直方体ができます。

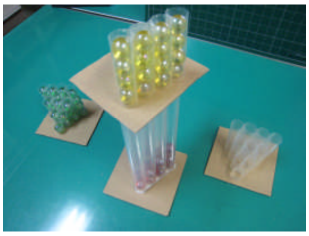


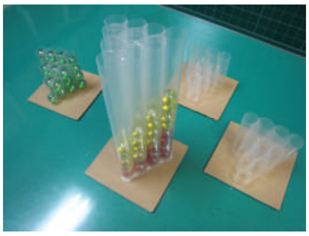
【図形的な考え方その2】

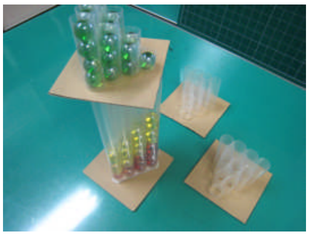
下の写真のように、$(1^2+2^2+3^2+4^2)$個のビー玉を入れたものが、赤、黄、緑と３色分あります。このビー玉を赤、黄、緑の順に10本の円筒に移して、各円筒に入っているビー玉の個数が同じになるようにします。（説明不十分ですが、下の写真を参考にしてください）

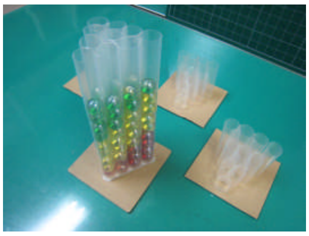


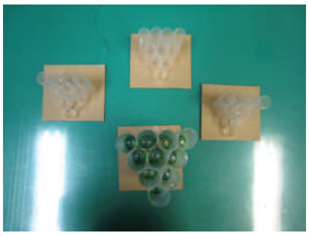




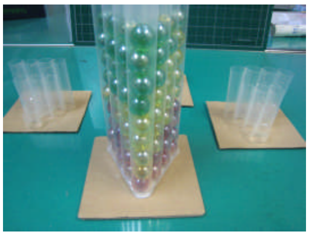








真上から撮った写真

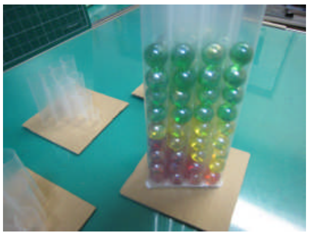


正面から撮った写真

３つの側面の方向から見ると、

方向その1

方向その2



方向その3

この結果から何が分かりますか？

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)(2n+1)$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

※　赤のビー玉の個数のように、1,2,2,3,3,3,…,n,n,…,n という数を正三角形に並べて書き、それを120°回転した正三角形（黄のビー玉）と、240°回転した正三角形（緑のビー玉）の3つの正三角形に重なって書かれてある数の和を考えると、すべて2n＋1 になるなど、一般化した解説は省略しますが、各自で考察してください。

※　このような活動をすることによって、図形的な感覚が養われるのではないでしょうか？

ところで、教材28では $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = {}_{n+1}C_2}$ という式の持つ意味でしたが、

この教材29では、$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = {}_{n+2}C_3 + {}_{n+1}C_3}$ という式の持つ意味を考えてみませんか？

この他にも、問題や式等の図形的意味を考えてみませんか？