

知的好奇心をくすぐる(!?)教材28

『自然数の和、奇数の和の図形的意味』

自然数の和 $1+2+3+\dots+2008+2009+2010 = ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2008 + 2009 + 2010 \quad \dots \textcircled{1} \text{ とおくと}$$

$$S = 2010 + 2009 + 2008 + \dots + 3 + 2 + 1 \quad \dots \textcircled{2} \text{ より、}$$

$$2S = 2011 + 2011 + 2011 + \dots + 2011 + 2011 + 2011$$

$$\therefore S = 2011 \times 2010 \div 2 \\ = 2021055$$

この上の考え方は、ガウス少年のエピソードとして有名です。

※ 高校数学では、 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$ に $n=2010$ を代入して求めることができます。

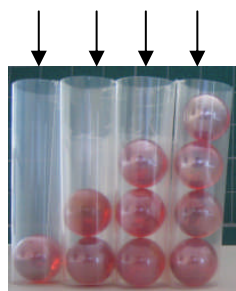
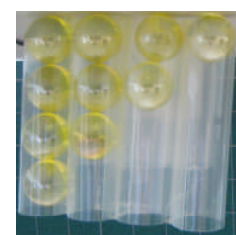
この公式 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$ は、

- 上のようなガウス少年の考え方から導く方法
- $\sum_{k=1}^n \{(k+1)^2 - k^2\} = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$ と $\sum_{k=1}^n 1 = n$ から導く方法
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{k(k+1) - (k-1)k\}$ から導く方法 などがああります。

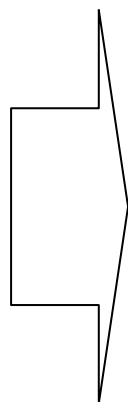
各自で導いてください。

$(1+2+3+4) \times 2 = 4 \times (4+1)$ の **図形的意味** (ガウス少年の考え方)

ビー玉の個数に着目して考えてください。



$$(1+2+3+4) \times 2$$



$$4 \times (4+1)$$

$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$ の **図形的意味は、**

このように階段状の図形を
2つ合わせて長方形にすれば、
理解できると思います。

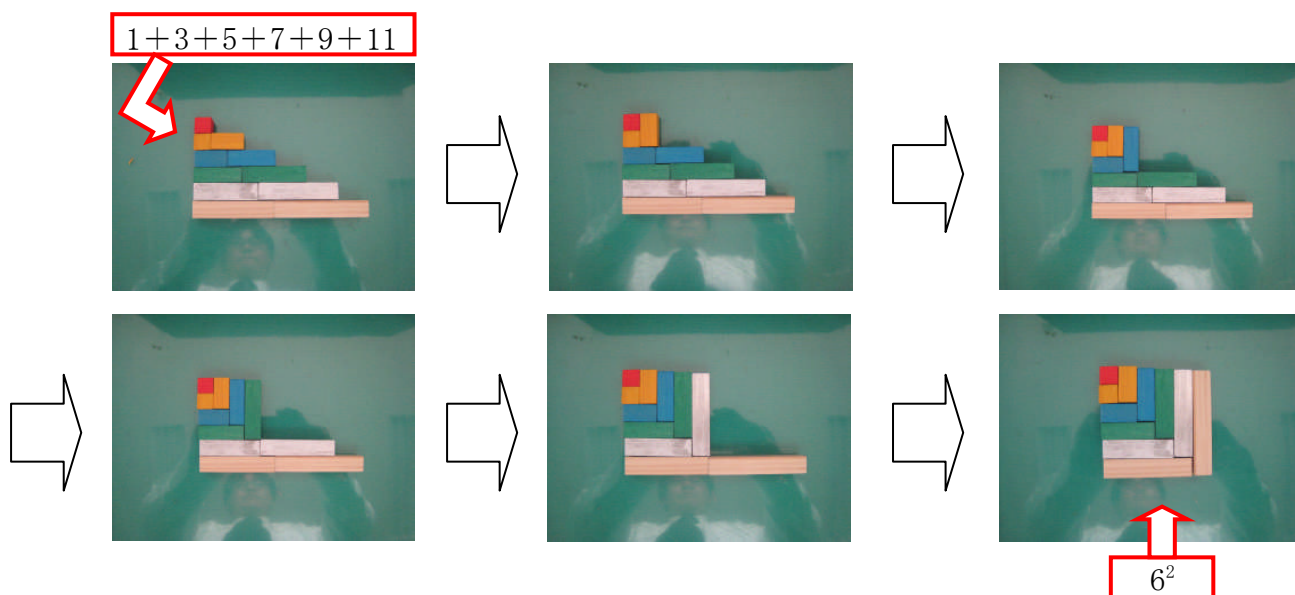
奇数の和 $1+3+5+7+9+11 = ?$ の図形的意味

● 1 ページ目のガウス少年の考え方を面積で考え、それを表す教具を作って求めました。



$$\frac{(1+3+5+7+9+11) \times 2}{\text{つまり、} 1+3+5+7+9+11} = \frac{6 \times (1+11)}{6 \times 12 \div 2} = 36$$

● 下の写真のような教具を使って、等積変形の考え方を利用して求めました。



$$\frac{1+3+5+7+9+11}{=} = \frac{6^2}{=} = 36$$

- ※ 解説は省略しますが、写真を見て各自で考えてください。
- ※ 小さい頃から、このような遊びや操作活動をすることによって、図形的な感覚が養われるのではないのでしょうか？

ところで、 ${}_{n+1}C_2 = \frac{n}{2}(n+1)$ であることから、 $\sum_{k=1}^n k = {}_{n+1}C_2$ ですが、この $\sum_{k=1}^n k = {}_{n+1}C_2$ という式の持つ意味を考えてみませんか？

この他にも、問題や式等の図形的意味を考えてみませんか？