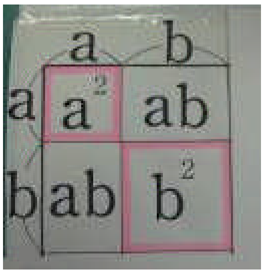
知的好奇心をくすぐる(!?)教材27

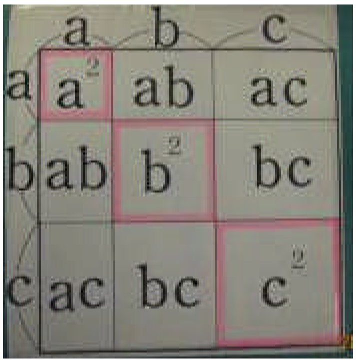
『色を活用した式の展開』

$(a+b)^2$，$(a+b+c)^2$，$(a+b)^3$　などの展開式を、a，b，c を正として、
一辺の長さが　$a+b$　または、$a+b+c$　の正方形の面積や、
一辺の長さが　$a+b$　の立方体の体積　というように、
下の写真のような図形的なイメージをもてば、更に発展して
$(a+b+c+d)^2$　，$(a+b+c+d+e)^2$　や　$(a+b+c)^3$　の展開式も理解しやすくなります。

● $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



● $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$



係数の和が
　$1+1+1+2+2+2 = 9$
　となることは、
　この図からも納得できる
　と思います。
縦方向にも横方向にも3つに
分けたのだから、
$3\times3=9$　で、
9が係数の和となります。

● $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

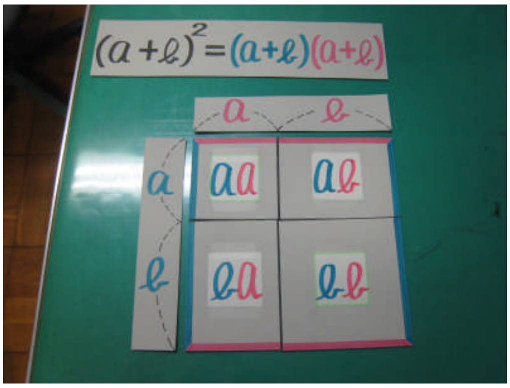
係数の和が　$1+3+3+1 = 8$　となることは、
この直方体の個数からも納得できると思います。
縦方向にも横方向にも水平方向にも２つに分けたのだから、
$2\times2\times2=8$で、８が係数の和となります。

しかし、このような図形的なイメージを持たせる**視覚化教具の利用だけでは、**
$(a+b)^4$，$(a+b)^5$　などの　$(a+b)^n$　や、
$(a+b+c)^4$，$(a+b+c)^5$　などの　$(a+b+c)^n$　（nは自然数）
つまり、$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{m-1} + a_m)^n$　の**展開式は理解しにくい**と思います。
そこで、

その教具に色を活用して、式の展開　について考えます。

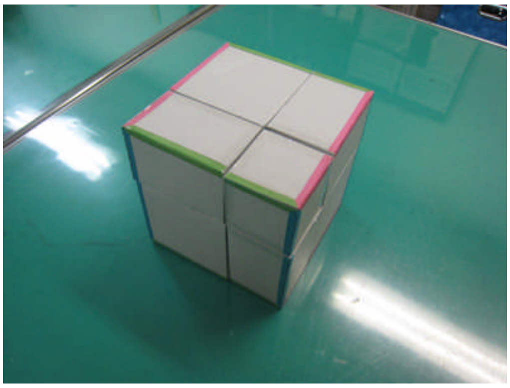
$(a+b)^n$ 型

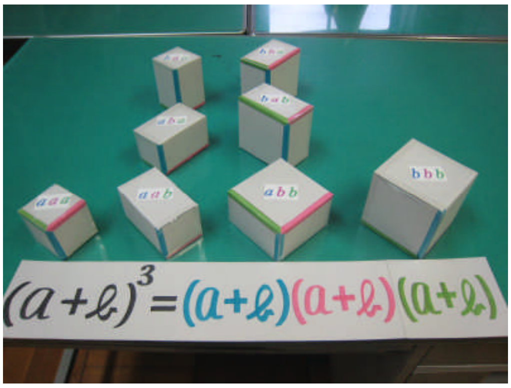
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= aa \quad + \quad ab \quad + \quad bb \\
& + \quad ba \\
&= {}_2C_0\, a^2 \quad + \quad {}_2C_1\, a\, b \quad + \quad {}_2C_2\, b^2 \\
&= a^2 \quad + \quad 2\,a\,b \quad + \quad b^2
\end{aligned}
$$

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$





$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= aaa \quad + \quad \boxed{\begin{matrix} aab \\ aba \\ baa \end{matrix}} \quad + \quad \boxed{\begin{matrix} abb \\ bab \\ bba \end{matrix}} \quad + \quad bbb \\
&= {}_3C_0\, a^3 \quad + \quad {}_3C_1\, a^2\, b \quad + \quad {}_3C_2\, a\, b^2 \quad + \quad {}_3C_3\, b^3 \\
&= a^3 \quad + \quad 3\,a^2\,b \quad + \quad 3\,a\,b^2 \quad + \quad b^3
\end{aligned}
$$

● $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (aa+ab+ba+bb)(aa+ab+ba+bb) \\
&= aaaa + aaab + aaba + aabb \\
&\qquad + abaa + abab + abba + abbb \\
&\qquad + baaa + baab + baba + babb \\
&\qquad + bbaa + bbab + bbba + bbbb \\
&= aaaa + \boxed{\begin{matrix} aaab \\ +\ aaba \\ +\ abaa \\ +\ baaa \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} aabb \\ +\ abab \\ +\ abba \\ +\ baab \\ +\ baba \\ +\ bbaa \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} abbb \\ +\ babb \\ +\ bbab \\ +\ bbba \end{matrix}} + bbbb \\
&= {}_4C_0\, a^4 + {}_4C_1\, a^3b + {}_4C_2\, a^2b^2 + {}_4C_3\, ab^3 + {}_4C_4\, b^4 \\
&= a^4 + \underline{4}\, a^3b + \underline{6}\, a^2b^2 + \underline{4}\, ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

⇧
a^3b の項の係数が 4 となるのは、青 桃 緑 赤 の4色のうち、b となる1色を選ぶと考えるからである。つまり、

$${}_4C_1 = 4$$

4色のうち、a となる3色を選ぶと考えてもよい。

⇧
a^2b^2 の項の係数が 6 となるのは、青 桃 緑 赤 の4色のうち、b となる2色を選ぶと考えるからである。つまり、

$${}_4C_2 = 6$$

⇧
ab^3 の項の係数が 4 となるのは、青 桃 緑 赤 の4色のうち、b となる3色を選ぶと考えるからである。つまり、

$${}_4C_3 = 4$$

このように、$(a+b)^n$ の $a^{n-k}b^k$ の項の係数は、

n 色のうち、どの k 色が b で、残りの $n-k$ 色が a であるか、その場合の数が係数になるので、n 色から b として k 色を選ぶ場合の数を考えればよい（a の色は、b の色が決まれば自動的に決まる）ことから、$a^{n-k}b^k$ の項の係数は ${}_nC_k$ になることが理解できると思います。

⇩

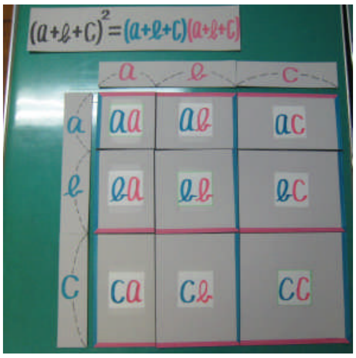
二項定理

$$\boxed{(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n + {}_nC_1\, a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_k\, a^{n-k}b^k + \cdots + {}_nC_n\, b^n}$$

$$= \frac{n!}{0!n!}a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k + \cdots + \frac{n!}{n!0!}b^n$$

$(a+b+c)^n$ 型

● $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$



$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\
&= aa + bb + cc + ab + bc + ac \\
&\qquad\qquad\qquad\;\; + ba + cb + ca \\
&= \frac{2!}{2!0!0!}a^2 + \frac{2!}{0!2!0!}b^2 + \frac{2!}{0!0!2!}c^2 + \frac{2!}{1!1!0!}ab + \frac{2!}{0!1!1!}bc + \frac{2!}{1!0!1!}ac
\end{aligned}
$$

● $(a+b+c)^4 =$ 　　？

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^4 &= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) \\
&= (aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc)(aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc) \\
&= aaaa+aaab+aaac+aaba+aabb+aabc+aaca+aacb+aacc \\
&\quad +abaa+abab+abac+abba+abbb+abbc+abca+abcb+abcc \\
&\quad +acaa+acab+acac+acba+acbb+acbc+acca+accb+accc \\
&\quad +baaa+baab+baac+baba+babb+babc+baca+bacb+bacc \\
&\quad +bbaa+bbab+bbac+bbba+bbbb+bbbc+bbca+bbcb+bbcc \\
&\quad +bcaa+bcab+bcac+bcba+bcbb+bcbc+bcca+bccb+bccc \\
&\quad +caaa+caab+caac+caba+cabb+cabc+caca+cacb+cacc \\
&\quad +cbaa+cbab+cbac+cbba+cbbb+cbbc+cbca+cbcb+cbcc \\
&\quad +ccaa+ccab+ccac+ccba+ccbb+ccbc+ccca+cccb+cccc \\
&= aaaa+bbbb+cccc+aaab+bbbc+accc+abbb+bccc+aaac+aabb+bbcc+aacc+aabc+abbc+abcc \\
&\quad +aaba+bbcb+cacc+babb+cbcc+aaca+abab+bcbc+acac+aacb+abcb+acbc \\
&\quad +abaa+bcbb+ccac+bbab+ccbc+acaa+abba+bccb+acca+abac+acbb+accb \\
&\quad +baaa+cbbb+ccca+bbba+cccb+caaa+baab+cbbc+caac+abca+babc+bacc \\
&\quad +baba+cbcb+caca+acab+bacb+bcac \\
&\quad +bbaa+ccbb+ccaa+acba+bbac+bcca \\
&\quad +baac+bbca+cabc \\
&\quad +baca+bcab+cacb \\
&\quad +bcaa+bcba+cbac \\
&\quad +caab+cabb+cbca \\
&\quad +caba+cbab+ccab \\
&\quad +cbaa+cbba+ccba \\
&= \boxed{}a^4+\boxed{}b^4+\boxed{}c^4+\boxed{}a^3b+\boxed{}b^3c+\boxed{}c^3a+\boxed{}ab^3+\boxed{}bc^3+\boxed{}ca^3+\boxed{}a^2b^2+\boxed{}b^2c^2+\boxed{}c^2a^2+\boxed{}a^2bc+\boxed{}ab^2c+\boxed{}abc^2 \\
&= a^4+b^4+c^4+4a^3b+4b^3c+4c^3a+4ab^3+4bc^3+4ca^3+6a^2b^2+6b^2c^2+6c^2a^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2
\end{aligned}
$$

このように、$(a+b+c)^n$ の $a^pb^qc^r$ の項の係数は、

n 色のうち、どの p 色が a で、残りの $n-p$ 色のうち、どの q 色が b で、さらに残りの $n-p-q$ 色が c となるか、その場合の数が係数になるので、n 色から a として p 色を選び、残りの $n-p$ 色から b を選ぶ場合の数と考えればよい（c の色は、a ，b の色が決まれば自動的に決まる）ことから、

$a^pb^qc^r$ の項の係数は ${}_nC_p\ {}_{n-p}C_q$ になることが理解できると思います。

また、１番目が青，２番目が桃，…と決めておけば、

p 個の a と q 個の b と r 個の c の合計 n 個の同じものを含む順列を考えればよいことから、

$a^pb^qc^r$ の項の係数は $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ となることも理解できると思います。

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項は

$\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ 　ただし、$p+q+r=n$ 　$\left({}_nC_p\ {}_{n-p}C_q\ {}_{n-p-q}C_r\ a^pb^qc^r\right.$ 　つまり ${}_nC_p\ {}_{n-p}C_q\ a^pb^qc^r$ 　としてもよい。$\left.\right)$

この他にも、色を活用した教材を考えてみませんか？

参考

$(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{m-1}+a_m)^n$ を展開して整理したときの、

① 項の個数　**② 各項の係数の和**　について考えます。

① 項の個数 について

各項は、$a_1^{n_1}\ a_2^{n_2}\ a_3^{n_3}\ a_4^{n_4}\cdots\cdots a_{m-1}^{n_{m-1}}\ a_m^{n_m}$

（ただし、$n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots\cdots n_{m-1}+n_m=n$

$n_1,n_2,n_3,n_4,\cdots\cdots,n_{m-1},n_m$ は負でない整数）と表せるので、

項の個数は、

$n_1,n_2,n_3,n_4,\cdots\cdots,n_{m-1},n_m$ は負でない整数として、

$n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots\cdots n_{m-1}+n_m=n$　を満たす（$n_1,n_2,n_3,n_4,\cdots\cdots,n_{m-1},n_m$）

が何個あるかを考えればよいことになります。

よって、○がn個，｜が$m-1$個の同じものを含む順列を考えることと同じなので、

項の個数は、${}_{n+m-1}C_n$　になります。

② 各項の係数の和 について

m^n　であることは、簡単に分かると思います。

具体例を表にまとました。

	① 項の個数	② 各項の係数の和
$a+b$	2　（$={}_2C_1$）	2（$=2^1={}_1C_0+{}_1C_1$）
$(a+b)^2$	3　（$={}_3C_2$）	4（$=2^2={}_2C_0+{}_2C_1+{}_2C_2$）
$(a+b)^3$	4　（$={}_4C_3$）	8（$=2^3={}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3$）
$(a+b)^4$	5　（$={}_5C_4$）	16（$=2^4={}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4$）
⋮	⋮	⋮
$(a+b)^n$	$n+1$　（$={}_{n+1}C_n$）	2^n（$={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$）

二項定理 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^k b^{n-k}$　に

$a=b=1$　を代入したものです。

	① 項の個数	② 各項の係数の和
a^2	1 （$={}_2C_2=\sum_{k=1}^{1}k$）	1 （$=1^2$）
$(a+b)^2$	3 （$={}_3C_2=\sum_{k=1}^{2}k$）	4 （$=2^2$）
$(a+b+c)^2$	6 （$={}_4C_2=\sum_{k=1}^{3}k$）	9 （$=3^2$）
$(a+b+c+d)^2$	10 （$={}_5C_2=\sum_{k=1}^{4}k$）	16 （$=4^2$）
$(a+b+c+d+e)^2$	15 （$={}_6C_2=\sum_{k=1}^{5}k$）	25 （$=5^2$）
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2$	$\frac{m}{2}(m+1)$ （$={}_{m+1}C_2=\sum_{k=1}^{m}k$）	m^2

	① 項の個数	② 各項の係数の和
$(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{m-1}+a_m)^n$	${}_{n+m-1}C_n$	m^n