知的好奇心をくすぐる(!?)教材25

『フィボナッチ数列』

$\{a_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ……

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$$

● ひまわり、松ボックリ　などにも現れます。

「ひまわり」の種は、右巻き、左巻きの渦が交互に現れ、
種の個数がフィボナッチ数列になっています。
更に、「ひまわり」は黄金角(137.5°：222.5° ≒ 1：1.618)で
種をつけています。

● 「階段をのぼるのに、一度に１段ずつか、２段ずつか、またはその組み合わせでのぼる方法の場合の数」にも現れます。

階段の数	1	2	3	4	5	6	7	…
のぼり方	1	2	3	5	8	13	21	…

● **フィボナッチ数列の漸化式**

$a_1 = 1$ ， $a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 　を解くと、

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

となります。**各自で解いてみてください。**

※　a_n は無理数$\sqrt{5}$を用いた式ですが、a_n の値はすべて整数です。

● $\{a_n\}$ ： 1， 1， 2， 3， 5， 8，13，21，34，55，89， ……

$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ ： $\dfrac{1}{1}$， $\dfrac{2}{1}$， $\dfrac{3}{2}$， $\dfrac{5}{3}$， $\dfrac{8}{5}$， $\dfrac{13}{8}$， $\dfrac{21}{13}$， $\dfrac{34}{21}$， $\dfrac{55}{34}$， $\dfrac{89}{55}$， …… について考えます。

$$\vdots$$

$$\frac{8}{5} = 1.6$$

$$\frac{13}{8} = 1.625$$

$$\frac{21}{13} \fallingdotseq 1.6153846$$

$$\frac{34}{21} \fallingdotseq 1.6190476$$

$$\frac{55}{34} \fallingdotseq 1.6176471$$

$$\frac{89}{55} \fallingdotseq 1.6181818$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ ?$$

フィボナッチ数列なので、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

両辺を a_{n+1} で割ると、 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

ここで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x_n$ とおくと、 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$ $\therefore\ x_{n+1}x_n - x_n - 1 = 0$ ・・・①

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ が存在すると仮定して、

$n\to\infty$ のとき、$x_{n+1} = x_n = \alpha$ とおくと、①は $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ $\therefore\ \alpha = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a_n > 0$ なので、$\alpha > 0$ よって、 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

つまり、 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

フィボナッチ数列の中に、黄金比 が存在しました！

● $\{a_n\}$ ： 1， 1， 2， 3， 5， 8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，……

①

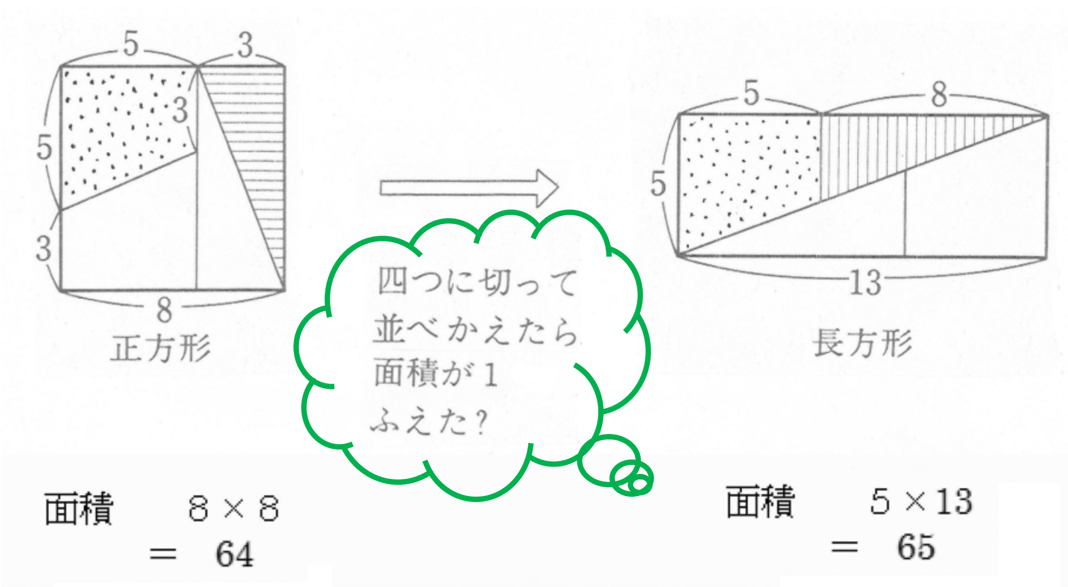
$1^2 = 1$， $2 \times 1 = 2$	よって、$1^2 - 2 \times 1 = -1$
$2^2 = 4$， $3 \times 1 = 3$	よって、$2^2 - 3 \times 1 = 1$
$3^2 = 9$， $5 \times 2 = 10$	よって、$3^2 - 5 \times 2 = -1$
$5^2 = 25$， $8 \times 3 = 24$	よって、$5^2 - 8 \times 3 = 1$
$8^2 = 64$， $13 \times 5 = 65$	よって、$8^2 - 13 \times 5 = -1$
$13^2 = 169$， $21 \times 8 = 168$	よって、$13^2 - 21 \times 8 = 1$
$21^2 = 441$， $34 \times 13 = 442$	よって、$21^2 - 34 \times 13 = -1$

・
・
・

$\boxed{a_{n+1}{}^2 - a_{n+2}\, a_n = (-1)^n}$ が推測できます。

＜ 証明 ＞
数学的帰納法で簡単に証明できます（省略）。

※ 有名な数学トリックを紹介します。



フィボナッチ数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89， ……

$8^2 - 13 \times 5 = -1$ を利用しています。

★ 5，8，13 以外の組み合わせでも、このトリックはできます。

$\{a_n\}$ ： 1， 1， 2， 3， 5， 8， 13， 21， 34， 55， 89， 144， 233， 377， 610， ……

同様に、フィボナッチ数列は、②～⑪も成り立ちます。
（数学的帰納法を用いるなどして、各自で証明してください。）

② $\boxed{a_{n+2}\,a_{n+1} - a_{n+1}\,a_n = a_{n+1}^{\ 2}}$ 例 $8\times5 - 5\times3 = 5^2$

例は、
n=4 を代入

③ $\boxed{a_{n+2}^{\ 2} - a_n^{\ 2} = a_{2n+2}}$ 例 $8^2 - 3^2 = 55$

④ $\boxed{a_{n+2}^{\ 3} + a_{n+1}^{\ 3} - a_n^{\ 3} = a_{3n+3}}$ 例 $8^3 + 5^3 - 3^3 = 610$

⑤ $\boxed{a_{m+1}\,a_{n+1} + a_m\,a_n = a_{m+n+1}}$ 例 $13\times5 + 8\times3 = 89$

例は、
m=6, n=4 を
代入

$m=n$ のとき、$\boxed{a_{n+1}^{\ 2} + a_n^{\ 2} = a_{2n+1}}$

例 $5^2 + 3^2 = 34$

⑥ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+2} - 1}$ 例 $1+1+2+3 = 8 - 1$

⑦ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_{2n}}$ 例 $1+2+5+13 = 21$

⑧ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = a_{2n+1} - 1}$ 例 $1+3+8+21 = 34 - 1$

⑨ $\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} a_k^{\ 2} = a_{n+2}\,a_{n+1}}$ 例 $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2 = 8 \times 5$

⑩ $\boxed{\sum_{k=1}^{2n-1} a_{k+1}\,a_k = a_{2n}^{\ 2}}$

例 $1\times1+2\times1+3\times2+5\times3+8\times5+13\times8+21\times13 = 21^2$

⑪ $\boxed{\sum_{k=1}^{2n} a_{k+1}\,a_k = a_{2n+1}^{\ 2} - 1}$

例 $1\times1+2\times1+3\times2+5\times3+8\times5+13\times8+21\times13+34\times21 = 34^2 - 1$

この他にも、フィボナッチ数列に関連することは多くあります。
フィボナッチ数列について調べたり、発見したりしてみませんか？