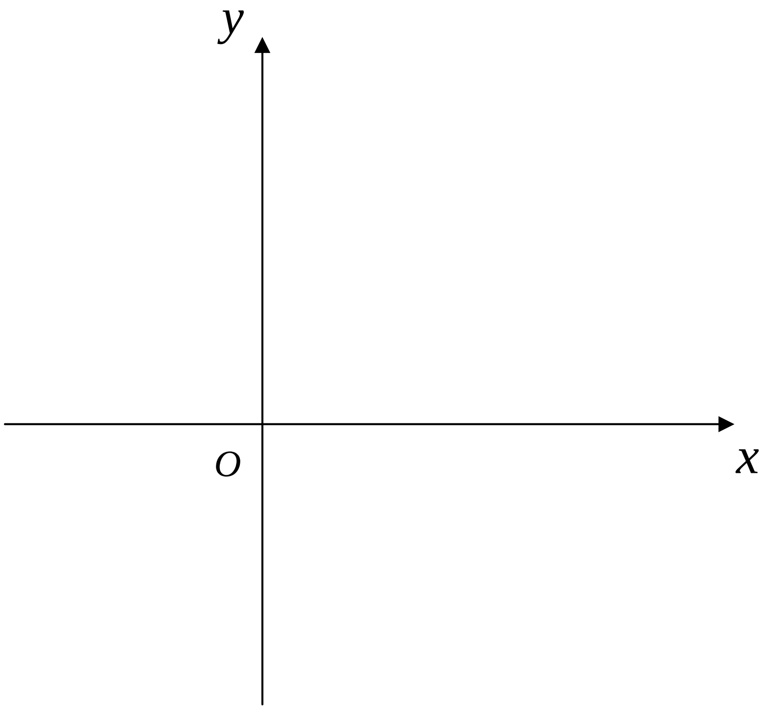
知的好奇心をくすぐる(!?)教材24

『初項と漸化式で定まる数列の極限の図形的意味』

次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=-x^2+x+\frac{1}{4}$ のグラフをかけ。



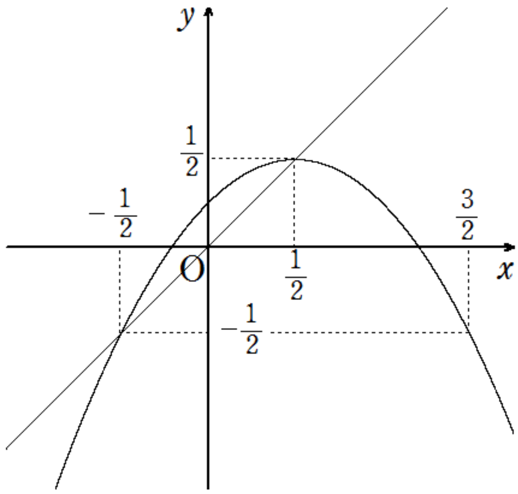
(2)　数列$\{a_n\}$を、$a_1=a$　，$a_{n+1}=-a_n{}^2+a_n+\frac{1}{4}$ によって定める。

$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。(答だけでよい。)

（答）　$a=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$　のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=-\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$　のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$

$a<-\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{3}{2}<a$　のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$



この問題は、

「初項と漸化式で定まる数列の極限の図形的意味」の理解度確認用の問題だと思います。
漸化式を解いてから数列$\{a_n\}$の極限を考えるのではなく、
グラフから数列$\{a_n\}$の極限を考えるという問題です。

ちなみに、

「$a_1=2$ ，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$ によって数列$\{a_n\}$を定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。」という問題は、
漸化式を解いて、$a_n=-4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+6$　とし、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=6$　と解きますが、
教科書等にも記載されているように、
２直線　$y=\dfrac{1}{2}x+3$　，$y=x$　のグラフを利用して　数列$\{a_n\}$の極限を考えれば、
答えの確かめができます。
（この場合、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$は、２直線の交点の$x$座標６に等しいです。）

この他にも、図形的意味を問うような問題を作ってみませんか？