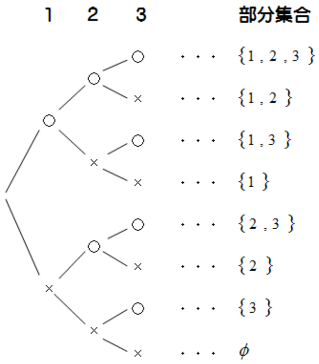
知的好奇心をくすぐる(!?)教材17

『別解の発想のしかたの一例』

―部分集合の個数の求め方を通して―

問　集合 $A = \{1 , 2 , 3 \}$ の部分集合は何個あるか。

この問に、
【解法１】



$2^3 = 8$　個

と解くのが一般的であると思いますが、これ以外の解法についても考えてみます。

● $A = \{1,2,3,\cdots ,n\}$ の部分集合の個数を求める問題において、
『$1,2,3,\cdots ,n$ の数自体に部分集合の要素になるかどうかの権利（２択）があると考え、
A の部分集合の個数は $2\times2\times\cdots\times2 = 2^n$ 個。』と解くのが【解法１】ですが、
この 2^n と**同値な式を導くことによって、別解を考えます。**

●そこで、**二項定理**　$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k}$　に　$a=b=1$　を代入すると、

等式　$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k$　　つまり、$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$　が得られ、
2^n と同値な式 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ を導くことができます。

このことから、
『部分集合の要素の個数が０個の場合，１個の場合，…，n 個の場合の、各場合の部分集合の個数の合計と考えて、${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ 個。』という別解が発想できました。

ちなみに、この問を【解法２】で解くと、
部分集合の要素の個数が０個，１個，２個，３個の場合があるので、
A の部分集合の個数は、${}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$ 個　　となります。

●また、**${}_nC_k$ の公式**　${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k = {}_nC_k$　を利用すると、
【解法２】の ${}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3$ は、

$$\begin{aligned}
{}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 &= ({}_3C_0 + {}_3C_1) + ({}_3C_2 + {}_3C_3) \\
&= {}_4C_1 + {}_4C_3 \\
&= 4 + 4 \\
&= 8 \text{個}
\end{aligned}$$

となります。

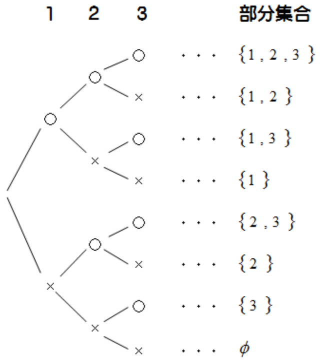
この解法を【解法３】とすると、【解法３】は、どのような考え方をした解法なのか、考えてみてください。

整理すると、

問　集合 $A=\{1,2,3\}$ の部分集合は何個あるか。

という問に、

【解法１】



A の部分集合の個数は、$2^3=8$　個

【解法２】部分集合の要素の個数が０個，１個，２個，３個の場合があるので、
A の部分集合の個数は、${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3$
＝　1　＋　3　＋　3＋　1
＝８個

言葉を入れてください。

【解法３】 　　　　　　　　　　　　　　　　なので、
A の部分集合の個数は、${}_4C_1+{}_4C_3$
＝４　＋　４
＝８個

という３つの**解法が、同値な式を導くことによって発想できました。**

一口メモ

二項定理　$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^k b^{n-k}$　に　$a=b=1$　を代入して、等式　$2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k$　が得られましたが、

二項定理　$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^k b^{n-k}$　に　$a=p$，　$b=1-p$ を代入すると、

$1=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$　となります。

これは、
『**二項分布**において、すべての確率の和が **1** である。
※　１回の試行で事象Ａが起こる確率が p である試行を n 回行うとき、事象Ａが
ちょうど k 回起こる確率（反復試行における確率）は ${}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$ である。　』
ということを表しています。

１個のさいころを３回投げるとき、１の目が出る回数をＸとする。

X	0	1	2	3	計
P	${}_3C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_3C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$	**1**

この他にも、別解の発想のしかたについて考えてみませんか？