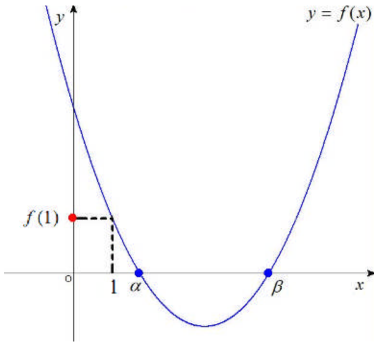
知的好奇心をくすぐる(!?)教材16

『「２次関数の軸等」と「解と係数の関係」との関連』

2次方程式の解の存在範囲 の問題における、
『 軸の位置， $f(\square)$ の値の符号 』 と『 解と係数の関係 』との関連

下記の例題を解いてみてください！



例題　２次方程式 $x^2+2kx+2k^2-5=0$ の異なる２つの実数解が、ともに１より大きくなるような定数 k の値の範囲を求めよ。

【解法1】

『軸の位置，$f(\square)$の値の符号 』の利用

$f(x)=x^2+2kx+2k^2-5$　とおくと、
$f(x)=(x+k)^2+k^2-5$
異なる２実解がともに１より大きくなる条件は、

$$\begin{cases} D/4=k^2-(2k^2-5)>0 & \cdots① \\ \text{軸の方程式：}\ x=-k>1 & \cdots② \\ f(1)=1+2k+2k^2-5>0 & \cdots③ \end{cases}$$

①より、$-k^2+5>0$
$\therefore\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ ……①´
②より、$k<-1$ …………②´
③より、$k^2+k-2>0$
$(k+2)(k-1)>0$
$\therefore\ k<-2\ ,\ 1<k$ …………③´
①´，②´，③´より、
$\underline{-\sqrt{5}<k<-2}$

【解法2】

『 解と係数の関係 』 の利用

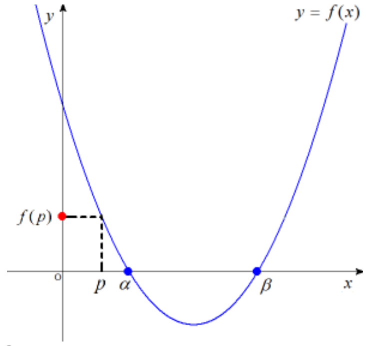
異なる２つの実数解を α,β とおく。
解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-2k$，$\alpha\beta=2k^2-5$
異なる２実解がともに１より大きくなる条件は、

$$\begin{cases} D/4=k^2-(2k^2-5)>0 & \cdots① \\ (\alpha-1)+(\beta-1)>0 & \cdots② \\ (\alpha-1)(\beta-1)>0 & \cdots③ \end{cases}$$

①より、$-k^2+5>0$
$\therefore\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ ……①´
②より、$\alpha+\beta-2>0$
$-2k-2>0$
$\therefore\ k<-1$ ……②´
③より、$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$
$(2k^2-5)-(-2k)+1>0$
$k^2+k-2>0$
$(k+2)(k-1)>0$
$\therefore\ k<-2\ ,\ 1<k$ …③´
①´，②´，③´より、
$\underline{-\sqrt{5}<k<-2}$

この例題は、上記の**『軸の位置，$f(\square)$の値の符号』**を利用した解法でも、**『 解と係数の関係』**を利用した解法でも解けます。しかし、ここで**大切なことは**、どちらの解法でも解けるということを理解するだけでなく、**『軸の位置 ，$f(\square)$の値の符号』と『 解と係数の関係』との間に関連があるのではないかと考えることであると思います。**

そこで、一般化した場合の



２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ （$a>0$）の異なる２つの実数解（α ，β）が、ともに p より大きくなるときの条件を求めることについて考えます。

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと、 $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

よって、軸の方程式は、 $x=-\dfrac{b}{2a}$

また、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ …$\boxed{あ}$ ，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ …$\boxed{い}$

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ （$a>0$）の異なる２つの実数解がともに p より大きくなるときの条件は、

$$\begin{cases} D/4=b^2-4ac>0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ (\alpha-p)+(\beta-p)>0 & \cdots ② \\ (\alpha-p)(\beta-p)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

ここで、②について考えます。

②は、$\alpha+\beta>2p$ $\quad\therefore\quad \dfrac{\alpha+\beta}{2}>p$

$\boxed{あ}$より、 $\dfrac{-\dfrac{b}{a}}{2}>p$ よって、 $-\dfrac{b}{2a}>p$ （逆も成り立つ。）

つまり、 $\boxed{(\alpha-p)+(\beta-p)>0 \;\cdots ② \Leftrightarrow \text{軸の方程式：}\; x=-\dfrac{b}{2a}>p}$

次に、③について考えます。

③は、　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)p+p^2>0$

$\boxed{あ}$, $\boxed{い}$より、$\dfrac{c}{a}-\left(-\dfrac{b}{a}\right)p+p^2>0$　　$\therefore\ p^2+\dfrac{b}{a}p+\dfrac{c}{a}>0$

$a>0$ より、　$ap^2+bp+c>0$

よって、　$f(p)=ap^2+bp+c>0$　　（逆も成り立つ。）

つまり、　$(\alpha-p)(\beta-p)>0$ …③　$\Leftrightarrow$　$f(p)>0$

整理すると、

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ （$a>0$） において、　［ $f(x)=ax^2+bx+c$ ］

『 解と係数の関係 』　　『軸の位置, f(□)の値の符号 』

$$\left\{\begin{array}{l} D/4=b^2-4ac>0 \\ (\alpha-p)+(\beta-p)>0 \\ (\alpha-p)(\beta-p)>0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} D/4=b^2-4ac>0 \\ \text{軸の方程式：}\ x=-\dfrac{b}{2a}>p \\ f(p)>0 \end{array}\right.$$

異なる２つの実数解(α , β)が
ともに p より大きくなる。

この他にも、分野を超えた関連性を見つけてみませんか？