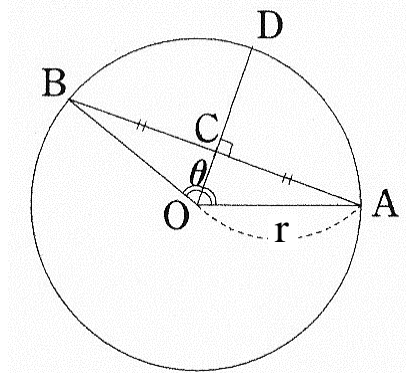


# 知的好奇心をくすぐる(!?)教材15

## 『三角関数の極限の問題に潜む図形的意味』

**問** 半径  $r$  の円  $O$  の周上に中心角  $\theta$  の弧  $AB$  をとり、弦  $AB$ 、弧  $AB$  を 2 等分する点を、それぞれ  $C$ 、 $D$  とする。次の極限を求めよ。



$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AB^2}{4CD}$$

**【解答】**  $AB = 2AC = 2r \sin \frac{\theta}{2}$  ,

$CD = OD - OC = r - r \cos \frac{\theta}{2} = r \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AB^2}{4CD} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\left( 2r \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}{4r \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r \left( 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2} \right) \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} r \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2r \end{aligned}$$

この問題において、

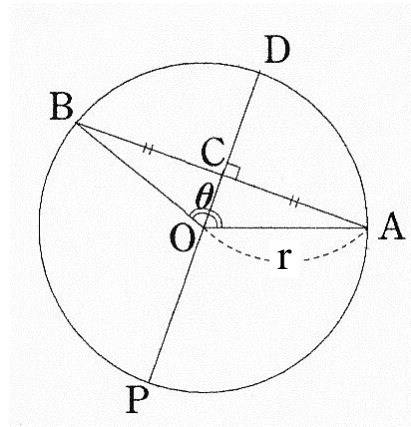
$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AB^2}{4CD} = 2r$  は  
何を意味しているのでしょうか？

## 問題の背景に潜む図形的意味について考えます。

直線OCと円の交点のうち、点Dと異なる点をPとする。

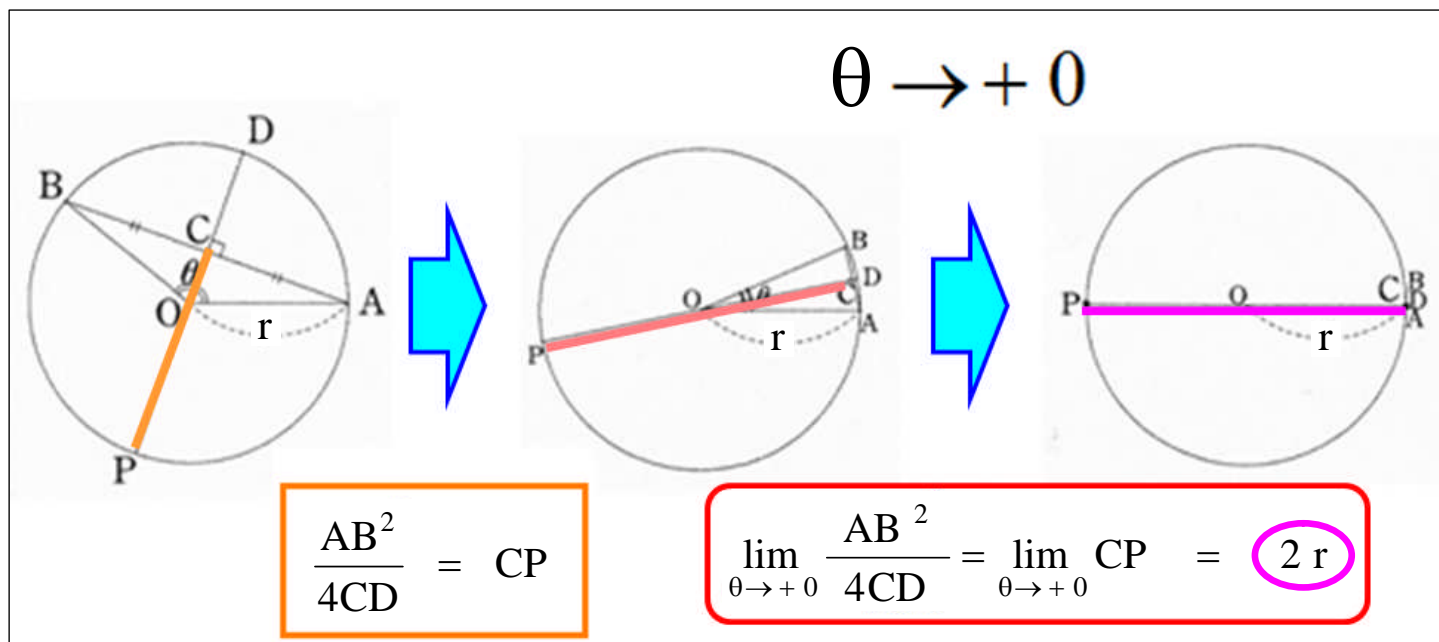
方べきの定理より

$$\begin{aligned} CP \times CD &= CA \times CB \\ &= \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} \\ \therefore CP &= \frac{AB^2}{4CD} \end{aligned}$$



したがって、

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AB^2}{4CD} = \lim_{\theta \rightarrow +0} CP = 2r$$



「 $\theta \rightarrow +0$  のとき、 $CP \rightarrow 2r$  (直径)」となることが上の図形から分かると思います。

問題を解くだけでなく、問題の背景に潜んでいるものや本質を見抜けるまで考えることが大切だと思います。

この他にも、問題の背景に潜む本質を見つけてみませんか？