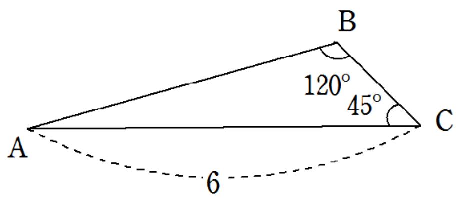
知的好奇心をくすぐる(!?)教材14

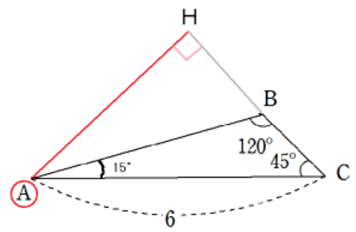
『余弦定理は、どの角を使うと都合がよい？』

問１　△ABCにおいて、$AC=6$、$\angle B=120°$、$\angle C=45°$ のとき、BCの長さを求めよ。



中学校の内容で、または高等学校の内容で、どのように解きますか？

４ページ目の【解法３】で示したように、
この問は、点Aから直線ＢＣに垂線を下ろすという補助線を図形外部に引けば簡単に解けます。しかし、ここでは、正弦定理や余弦定理を用いた解法について考えることにします。



正弦定理や余弦定理を用いた解法

△ＡＢＣの内角の和は 180°　より、$\angle BAC = 180° - 120° - 45° = 15°$

【解法４】 正弦定理を利用して、

$$\frac{6}{\sin 120°} = \frac{BC}{\sin 15°}$$

$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　より　　$\therefore\ BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

（ $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ が分からない場合は、
加法定理より、 $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$　と導けます。）

【解法５】 正弦定理を利用して、

$\dfrac{6}{\sin 120°} = \dfrac{AB}{\sin 45°}$　　$\therefore\ AB = 2\sqrt{6}$

ここで、余弦定理を利用して、

$BC^2 = 6^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2\cdot 6\cdot 2\sqrt{6}\cdot\cos 15°$

$= 24 - 12\sqrt{3}$　　（ $\because\ \cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ）

$BC = \pm\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$　　（ $\because\ \sqrt{24-12\sqrt{3}} = \sqrt{24-2\sqrt{108}} = \sqrt{18}-\sqrt{6} = 3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ ）

$BC > 0$　より　$BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

> $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ が分かるぐらいなら、
> $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ も分かると思うので、
> **【解法５】**で解くぐらいなら、**【解法４】**で解くはずです。
> よって、この**【解法５】**で解くことは、極めて珍しいことであると考えます。

【解法６】正弦定理を利用して、

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \qquad \therefore\ AB = 2\sqrt{6}$$

ここで、余弦定理を利用して、

$6^2 = BC^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot BC \cdot 2\sqrt{6} \cdot \cos\underline{120^\circ}$　　これを解いて　$BC = -\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}$

$BC > 0$　より　　$BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

【解法７】正弦定理を利用して、

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \qquad \therefore\ AB = 2\sqrt{6}$$

ここで、余弦定理を利用して、

$(2\sqrt{6})^2 = BC^2 + 6^2 - 2 \cdot BC \cdot 6 \cdot \cos\underline{45^\circ}$　　これを解いて　$BC = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$

$\angle BAC < \angle BCA$　より、$BC < AB$

$BC < 2\sqrt{6}$　より　　$BC = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ は不適。　$\left(\because \left(3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6} = \sqrt{18} - \sqrt{6} > 0 \right)$

よって、$BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

ここで、【解法６】も【解法７】も、余弦定理を利用していますが、

$\underline{120^\circ}$ を使った【解法６】は、
$BC = -\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}$ から『$BC > 0$ より』という**簡単な説明**で、$BC = -\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ が不適であることを説明しているのに対し、

$\underline{45^\circ}$ を使った【解法７】は、
三角形の辺と角の大小関係を利用して、**やや難しい説明**で、$BC = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ が不適であることを説明しています。

$\underline{120^\circ}$ を使ったときに**簡単な説明**で解の吟味ができたのは、偶然でしょうか？

ＡＣ＝b，ＡＢ＝c，Ａ，Ｂ，Ｃは与えられている、または求めていて、ＢＣ＝a を求める。

ただし、次の①～④の条件付きである。
① △ＡＢＣは直角三角形でもなく二等辺三角形でもない。
② Ａは、15°，75°，105° のいずれか。
③ Ｂ，Ｃは、30°，45°，60°，120°，135° のいずれか。
④ 15° や 75° や 105° の三角比を使わない。

このとき、
余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ は、②と④より利用できません。
そこで、
余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ と、余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ のどちらを利用すれば、解（a）の吟味をする際、「辺の長さは正なので」という簡単な説明ですむでしょうか？

$\boxed{\text{結論}}$　Ｂ＞Ｃのときは、**余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ を利用し、**
Ｂ＜Ｃのときは、**余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を利用すれば簡単な説明ですみます。**

角の大きい方で余弦定理を利用すると、解の吟味の際、なぜ、「辺の長さは正」という簡単な説明ですむのでしょうか？
考えてみてください。

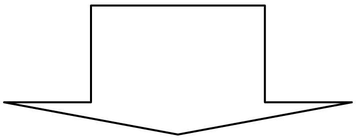
ヒント

○ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$ より　$a^2 - 2(c\cos\mathrm{B})\,a + (c^2 - b^2) = 0$

解の公式より　$a = c\cos\mathrm{B} \pm \sqrt{(c\cos\mathrm{B})^2 - (c^2 - b^2)}$

○ B＞C　$\Leftrightarrow$　$b > c > 0$

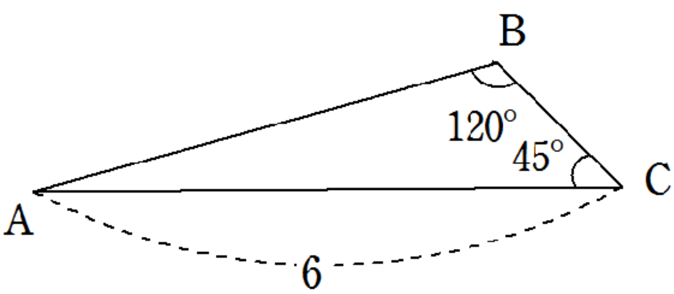
公式や定理について深く考え、新しい発見をしてみませんか？



平成20年度　愛媛県総合教育センターの研究紀要
「算数・数学における知識・技能を活用する力を育てる教材の研究
　－小・中・高等学校の縦断的な「つまずき」要因の分類を通して－　」
の　２(2)オ　にも掲載している内容と一部重複しますが、問１の補足説明をします。

問１　△ABCにおいて、AC＝6、∠B＝120°、∠C＝45°のとき、BCの長さを求めよ。

【 図Ｉ 】

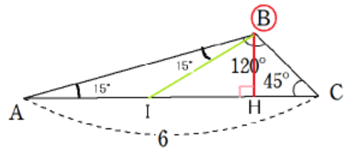


中学校の内容で、または高等学校の内容で、どのように解きますか？

$\boxed{問1}$を、補助線を引いて考える解法

△ＡＢＣの内角の和は 180°　より、∠ＢＡＣ＝$180°-120°-45°$＝15°

【解法１】 点Ｂから直線ＡＣに垂線を下ろし、交点をＨとする。また、
∠ＡＢＩ＝15°　となるように、辺ＡＣ上に点Ｉをとる。



ＢＣ＝xとおくと、∠ＢＣＨ＝45°　からＢＨ＝ＣＨ＝$\frac{\sqrt{2}}{2}x$

∠ＢＩＨ＝$15°+15°$＝30°　から

ＩＨ＝$\sqrt{3}$ ＢＨ＝$\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$　，ＢＩ＝２ＢＨ＝$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}x$

∠ＢＡＩ＝∠ＡＢＩ＝15°　からＡＩ＝ＢＩ　よって、ＡＩ＝$\sqrt{2}x$

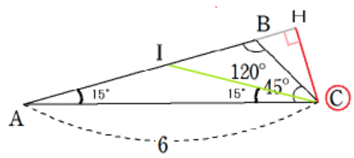
ＡＣ＝ＡＩ＋ＩＨ＋ＣＨ＝６より、$\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=6$

これを解いて、$x=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$　　よって、ＢＣ＝$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

⇩

この解法は、**高等学校の学習内容。**　(補助線ＢＩを引く発想は難しい!?)

【解法２】 点Ｃから直線ＡＢに垂線を下ろし、交点をＨとする。また、
∠ＡＣＩ＝15°　となるように、辺ＡＢ上に点Ｉをとる。



ＢＣ＝xとおくと、∠ＣＢＨ＝60°　から

ＢＨ＝$\frac{1}{2}x$　，ＣＨ＝$\frac{\sqrt{3}}{2}x$

∠ＣＩＨ＝$15°+15°$＝30°　から

ＩＨ＝$\sqrt{3}$ ＣＨ＝$\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{3}{2}x$　，ＣＩ＝２ＣＨ＝$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\sqrt{3}x$

∠ＣＡＩ＝∠ＡＣＩ＝15°　からＡＩ＝ＣＩ　よって、ＡＩ＝$\sqrt{3}x$

ＡＨ＝ＡＩ＋ＩＨ＝$\sqrt{3}x+\frac{3}{2}x$

∠ＡＨＣ＝90°　なので　$\left(\sqrt{3}x+\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=6^2$

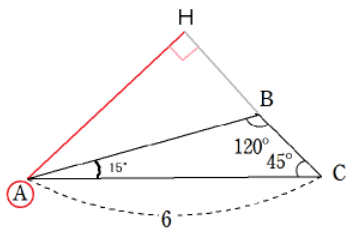
よって、$x^2=24-12\sqrt{3}$　　これを解いて、$x=\pm\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

$x>0$より　$x=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$　　よって、ＢＣ＝$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

⇩

この解法は、**高等学校の学習内容。**　(補助線ＣＩを引く発想は難しい!?)

【解法３】 点Ａから直線ＢＣに垂線を下ろし、交点をＨとする。



∠ＡＨＢ＝90°　，∠ＨＣＡ＝45°　なので　∠ＨＡＣ＝45°

$AC=6$　から、ＡＨ＝ＣＨ＝$6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

また、∠ＨＢＡ＝$180°-120°$＝60°　，∠ＡＨＢ＝90°　なので

ＢＨ＝$\frac{1}{\sqrt{3}}$×ＡＨ＝$\frac{1}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=\sqrt{6}$

したがって、ＢＣ＝ＣＨ－ＢＨ＝$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

⇩

この解法は、**中学校の学習内容。**　(1本の補助線で簡単に解けます！)

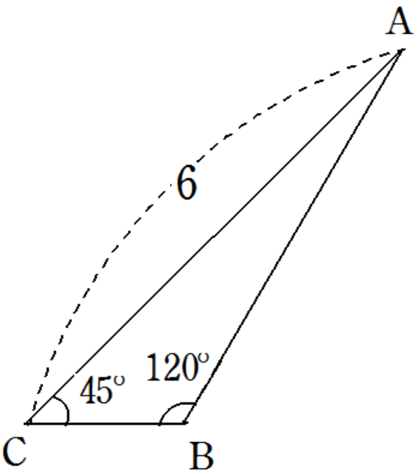
【解法３】のような補助線の引き方をすれば、瞬間的に解けます！（**美しい！感動！**）

しかし、△ＡＢＣを【図Ⅰ】のようにかいた場合、
【解法１】のＢＨのように、補助線を図形内部に引こうとする傾向があり、その後、どのように解けばよいか、わかりにくいようです。

なぜ、補助線を図形内部に引こうとするのか？
その理由の一つとして、**「図形外部への補助線も考えられる」という意識が不足**していると考えられます。

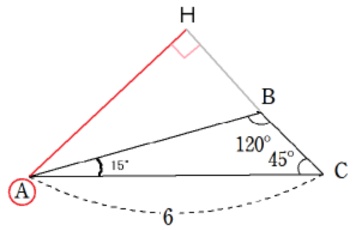
さらに、**図形外部への補助線のなかでも**、**【解法３】**のような補助線（ＢＨとＡＨ）は、『 ＾ 』型の図形外部補助線なので、補助線の引き方がさらに難しいようです。
そこで、△ＡＢＣを下の【 図Ⅱ 】のようにかくと、

【 図Ⅱ 】



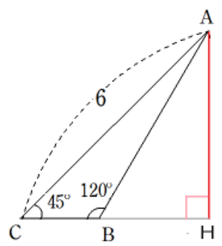
『 ⌟ 』型の図形外部補助線なので、【 図Ⅰ 】よりは補助線が引きやすくなるようです。

【 図Ⅰ 】の補助線



『 ＾ 』型の図形外部補助線

【 図Ⅱ 】の補助線

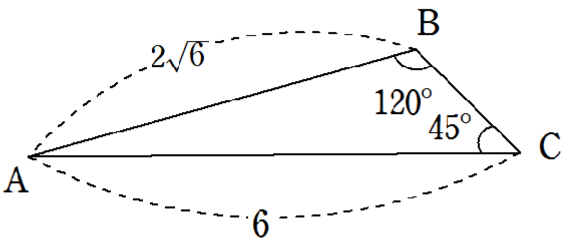


『 ⌟ 』型の図形外部補助線

これは、**「垂線を下ろす」という言葉に含まれる、上から下に向かって垂線を引くイメージが強く、『＾ 』型の図形外部補助線のように左下から右上に向かって垂線を「下ろす」というのは、心理的に反している行為のためではないかと考えられます。**

参考

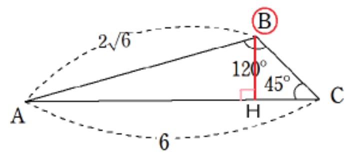
問２　△ ABC において、 $AB=2\sqrt{6}$ 、 $AC=6$ 、 $\angle B=120^\circ$ 、 $\angle C=45^\circ$ のとき、 BC の長さを求めよ。



問２は、問１に $AB=2\sqrt{6}$ という条件を追加した**条件過多**の問題です。
中学校の内容で、または高等学校の内容で、どのように解きますか？

問２を、補助線を引いて考える解法

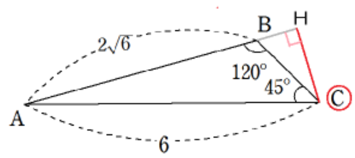
【解法１】 点**B**から直線ＡＣに垂線を下ろし、交点をＨとする。



ＢＨ＝ x とおくと、ＣＨ＝ x 、ＢＣ $=\sqrt{2}\,x$
∠ＡＨＢ＝90°　なので　 $x^2+(6-x)^2=(2\sqrt{6})^2$
これを解いて、 $x=3\pm\sqrt{3}$
ところで、∠ＨＡＢ＝ $180^\circ-120^\circ-45^\circ$ ＝15°　、∠ＨＢＡ＝ $180^\circ-90^\circ-15^\circ$ ＝75°
よって、∠ＨＡＢ＜∠ＨＢＡなので、ＢＨ＜ＡＨ…①
$x=3+\sqrt{3}$ のとき、ＢＨ＝ $3+\sqrt{3}$ 、ＡＨ＝ $6-(3+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$ となるので、
①から　 $x=3+\sqrt{3}$ は不適。よって、 $x=3-\sqrt{3}$
したがって、ＢＣ $=\sqrt{2}\,x=\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

この解法は、**高等学校の内容。**　**中学校の内容**なら、 $x=3\pm\sqrt{3}$ まで解けます。

【解法２】 点**C**から直線ＡＢに垂線を下ろし、交点をＨとする。

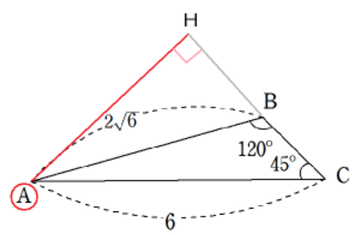


ＢＨ＝ x とおくと、ＣＨ＝ $\sqrt{3}\,x$ 、ＢＣ $=2x$
∠ＡＨＣ＝90°　なので　 $\left(2\sqrt{6}+x\right)^2+\left(\sqrt{3}\,x\right)^2=6^2$
これを解いて、 $x=\dfrac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{2}$ 　　 $x>0$ より　 $x=\dfrac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$
したがって、ＢＣ $=2x=2\times\dfrac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

この解法は、**高等学校の内容。**　**中学校の内容**で、 $x=\dfrac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{2}$ は難しい!?

【解法３】

問１の**【解法３】**と同じ解法。



この解法は、**中学校の内容。**（1 本の補助線で簡単に解けます！）
美しい！感動！