知的好奇心をくすぐる(!?)教材12

関数ｸﾞﾗﾌｿﾌﾄ GRAPES（ﾌﾘｰｿﾌﾄ）を利用した教材

『直交する２直線の交点の軌跡（除外点の考察）』

実数 m の値が変化するとき、２直線 $mx-y+5m=0$ …① $x+my-5=0$ …②
の交点 P の軌跡を求めよ。

解法1

①、②の交点を P（x，y）とし、x，y を m の式で表し(媒介変数表示)、
やや複雑な計算ではあるが、ここから m を消去して x，y の関係式を導くという解法。

解法2

①、②の交点を P（x，y）とし、m を x，y の式で表し、
①（または②）に代入して m を消去し、x，y の関係式を導くという解法。

※ **解法1, 解法2**のように解くことも考えられますが、次の**解法3**を通して図形的に考えます。

解法3

①より $m(x+5)-y=0$ なので、直線①は、定点 A（−5，0）を通る。
②より $my+(x-5)=0$ なので、直線②は、定点 B（5，0）を通る。
また、２直線の係数について、
$m\times1+(-1)\times m=0$ であるから、２直線①，②は垂直に交わる。
よって、求める図形は、線分 AB を直径とする円である。
ただし、①は直線 $x=-5$，②は直線 $y=0$ を表さないから、
その交点（−5，0）を除くことになる。

ここで、除外点（－5, 0）について考察します。

①より $y=mx+5m$ $\cdots$③
③を②に代入すると、$x+m(mx+5m)-5=0$

$$(m^2+1)\,x=5-5m^2$$

$$x=\frac{5-5m^2}{m^2+1} \quad \cdots④$$

③，④より、

$$y=m\frac{5-5m^2}{m^2+1}+5m$$

$$=\frac{5m-5m^3+5m^3+5m}{m^2+1}$$

$$=\frac{10m}{m^2+1} \quad \cdots⑤$$

よって、

$$\lim_{m\to\infty} x = \lim_{m\to\infty}\frac{5-5m^2}{m^2+1} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{5}{m^2}-5}{1+\frac{1}{m^2}} = -5$$

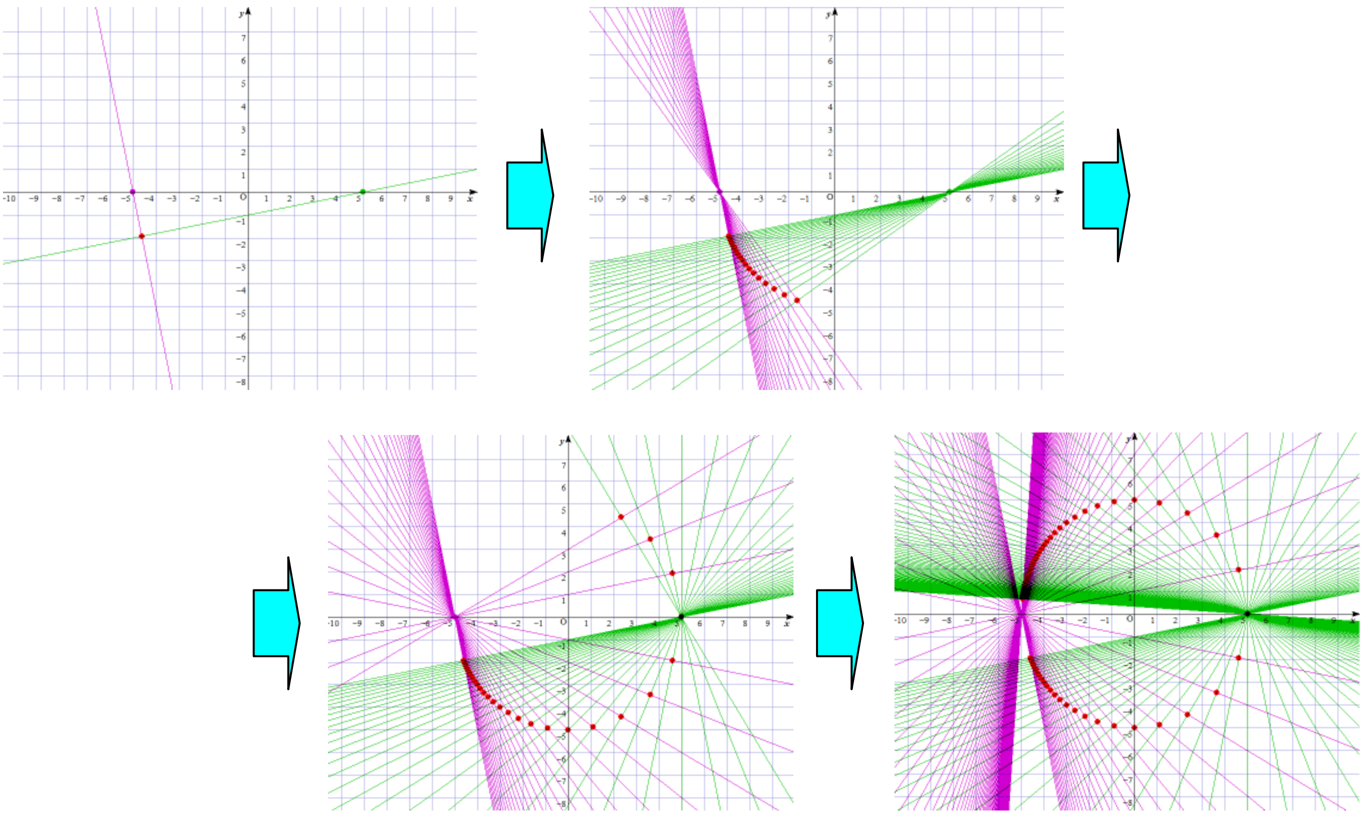
$$\lim_{m\to-\infty} x = \lim_{m\to-\infty}\frac{5-5m^2}{m^2+1} = \lim_{m\to-\infty}\frac{\frac{5}{m^2}-5}{1+\frac{1}{m^2}} = -5$$

$$\lim_{m\to\infty} y = \lim_{m\to\infty}\frac{10m}{m^2+1} = \lim_{m\to\infty}\frac{10}{m+\frac{1}{m}} = 0$$

$$\lim_{m\to-\infty} y = \lim_{m\to-\infty}\frac{10m}{m^2+1} = \lim_{m\to-\infty}\frac{10}{m+\frac{1}{m}} = 0$$

したがって、このことから、点（−5，0）を除くことがわかります。

更に、関数グラフソフトGRAPESを利用して、軌跡の動きを視覚に訴えてみます。考察については、各自でしてください。



この他にも、関数グ゛ラフソフトを利用した教材を作りませんか？