知的好奇心をくすぐる(!?)教材４

『問題の解法の図形的意味が分かる立体模型の教具』

― 置き換えをすると２次関数等に帰着できる問題を通して ―

［問題１］
$y=\sin^2\theta-\sin\theta+1$　（$0\leqq\theta\leqq 2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

【 この問題の一般的な解法 】

$t=\sin\theta$ とおくと、$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より、$-1\leqq t\leqq 1$

また、$y=\ t^2-t+1$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

よって、$t=\frac{1}{2}$ のとき、つまり、$\theta=\frac{\pi}{6}$ ，$\frac{5}{6}\pi$ のとき、最小値 $\frac{3}{4}$ をとり、

$t=-1$ のとき、つまり、$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき、　最大値3 をとる。

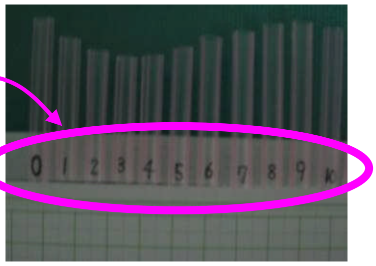
例えば、上記の問題の解法は、$t=\sin\theta$ とおくことによって、２次関数 $y=t^2-t+1$ の最大値と最小値の問題に帰着していますが、この解法に関係する立体模型の教具を作り視覚化することによって、この問題の図形的意味を深く理解できるのではないかと思います。
そこで、次のようにして立体模型の教具を作りました。

①　$y=f(\theta)=\sin^2\theta-\sin\theta+1$ において、θ の値を0° から10° ごとに、sin θ とyの値を求めて表にする。

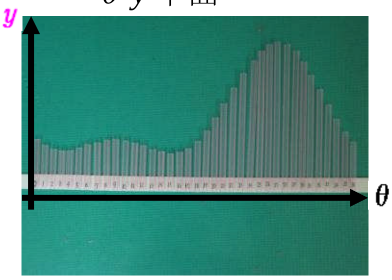
θ		ラジアン	sin θ	y
0 °	=	0.0000	0.0000	1.0000
10 °	=	0.1745	0.1736	0.8565
20 °	=	0.3491	0.3420	0.7750
30 °	=	0.5236	0.5000	0.7500
40 °	=	0.6981	0.6428	0.7704
50 °	=	0.8727	0.7660	0.8208
60 °	=	1.0472	0.8660	0.8840
70 °	=	1.2217	0.9397	0.9433
80 °	=	1.3963	0.9848	0.9850
90 °	=	1.5708	1.0000	1.0000
100 °	=	1.7453	0.9848	0.9850
110 °	=	1.9199	0.9397	0.9433
120 °	=	2.0944	0.8660	0.8840
130 °	=	2.2689	0.7660	0.8208
140 °	=	2.4435	0.6428	0.7704
150 °	=	2.6180	0.5000	0.7500
160 °	=	2.7925	0.3420	0.7750
170 °	=	2.9671	0.1736	0.8565
180 °	=	3.1416	0.0000	1.0000

θ		ラジアン	sin θ	y
180 °	=	3.1416	0.0000	1.0000
190 °	=	3.3161	−0.1736	1.2038
200 °	=	3.4907	−0.3420	1.4590
210 °	=	3.6652	−0.5000	1.7500
220 °	=	3.8397	−0.6428	2.0560
230 °	=	4.0143	−0.7660	2.3529
240 °	=	4.1888	−0.8660	2.6160
250 °	=	4.3633	−0.9397	2.8227
260 °	=	4.5379	−0.9848	2.9547
270 °	=	4.7124	−1.0000	3.0000
280 °	=	4.8869	−0.9848	2.9547
290 °	=	5.0615	−0.9397	2.8227
300 °	=	5.2360	−0.8660	2.6160
310 °	=	5.4105	−0.7660	2.3529
320 °	=	5.5851	−0.6428	2.0560
330 °	=	5.7596	−0.5000	1.7500
340 °	=	5.9341	−0.3420	1.4590
350 °	=	6.1087	−0.1736	1.2038
360 °	=	6.2832	0.0000	1.0000

② ①の表の θ と y の値をもとに、ストローを切って番号 n を記入する。
（ $\theta=(10\times n)^{\circ}$ のときの y の値をストローの長さにする。）
そして、 $t=\sin\theta$ のグラフをかき、そのグラフ上に短い棒を取り付け、ストローをその棒に差し込む。（ストローの取り換えを可能にするために短い棒を取り付けた。）

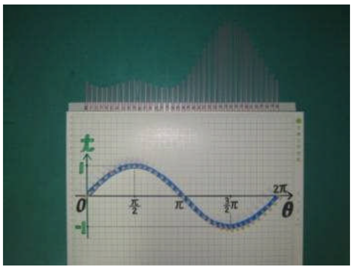


θ y 平面



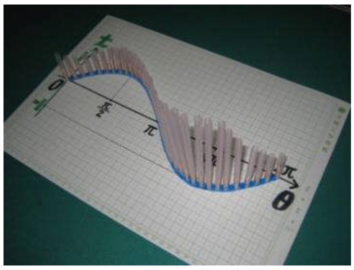
$y=\sin^2\theta-\sin\theta+1$

θ t 平面



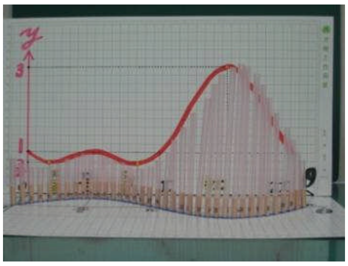
$t=\sin\theta$

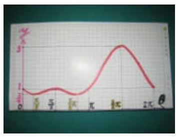
全　体

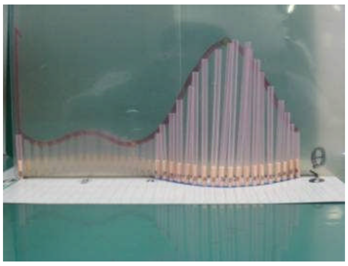


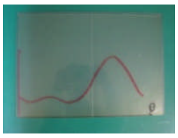
③ 完成した教具のストローの最上部をいろいろな角度から見る。

(1) θ y 平面を正面にして見た場合、 t 軸が消えたように見える。

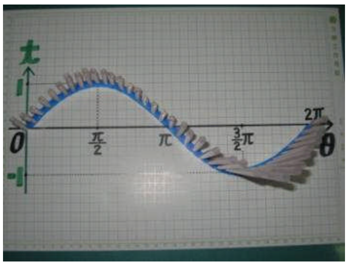


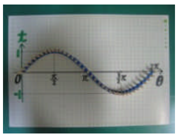
（ θ y 平面を正面にして見た  を平面 $t=1$ に置いて撮影した写真。）



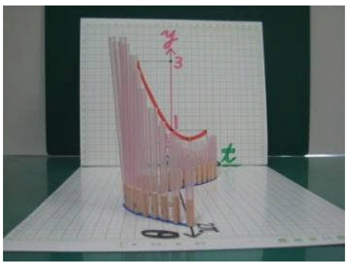
（ θ y 平面を正面にして見た  を平面 $t=0$ （θ y 平面）に置いて撮影した写真。）

(2) θ t 平面を正面にして見た場合、 y 軸が消えたように見える。



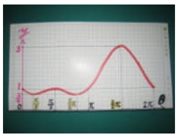
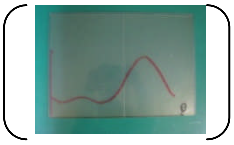
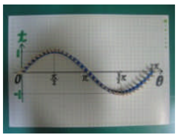
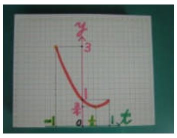
（ θ t 平面を正面にして見た  を平面 $y=0$ （θ t 平面）に置いて撮影した写真。）

(3) t y 平面を正面にして見た場合、 θ 軸が消えたように見える。

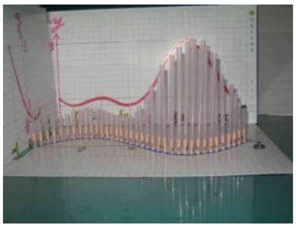
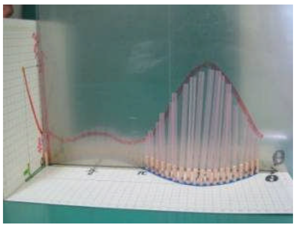
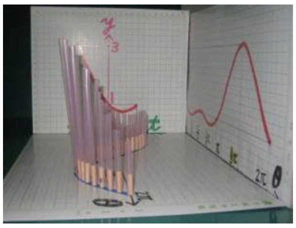
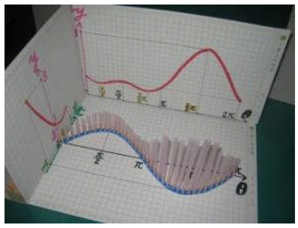


（ t y 平面を正面にして見た  を平面 $\theta=0$ （t y 平面）に置いて撮影した写真。）

(4) $\theta\, y$ 平面，$\theta\, t$ 平面，$t\, y$ 平面のそれぞれを正面にして見た

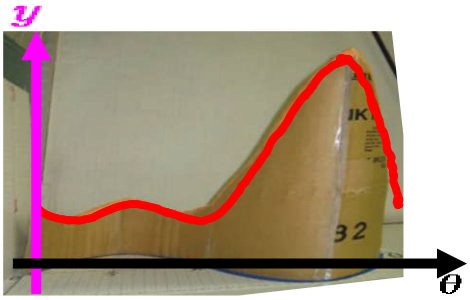





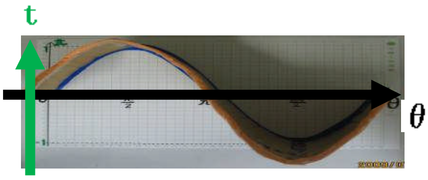
をすべて置いて撮影した写真。

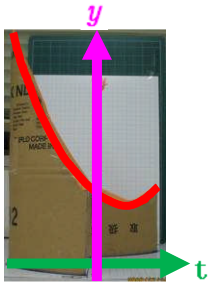





参考

上記の立体模型は、θ の値が10° ごとにストローを立てて作りましたが不連続です。
そこで、連続となるように段ボールで立体模型を作りました。







このようにして作った立体模型の教具から、どのようなことが分かるでしょうか？

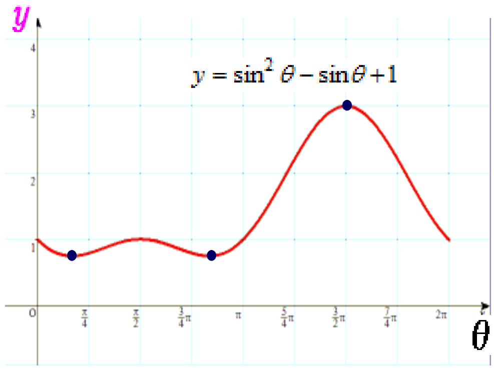
関数 $y=f(\theta)=\sin^2\theta-\sin\theta+1$ **について考えるということは、**
本来は $\theta\, y$ **平面（2次元の空間）で考える** **ということで、一般的には、次のように**
$\theta\, y$ **平面上の曲線** $y=f(\theta)=\sin^2\theta-\sin\theta+1$ **で考えます。**

$y' = f'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = (2\sin\theta - 1)\cos\theta$

$y' = 0$　とすると、$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

よって、y の増減表は次のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$f'(\theta)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	
$f(\theta)$	1	↘	極小 $\frac{3}{4}$	↗	極大 1	↘	極小 $\frac{3}{4}$	↗	極大 3	↘	1



しかし、この立体模型の教具で考えると、
$y=\sin^2\theta-\sin\theta+1$ **において、**$t=\sin\theta$ **と置き換えをし、関数** $y=t^2-t+1$ **で考えると**
いうことが、3次元の空間における曲線を、$t\, y$ **平面を正面にして見て考える** **という**
ことを意味することが分かったと思います。

θt 平面に垂直に立っているストローの場所で考えるならば、θ軸上に立っていたストローが、$t=\sin\theta$ の曲線上に移動する（ストローの最上部の高さは変わらない）ことが、$t=\sin\theta$ の置き換えをすることの図形的意味であり、それを、ty 平面を正面にして見たものが $y=t^2-t+1$のグラフです。

この立体模型の教具から、他の図形的意味も考えてみてください。

［問題２］

θ についての方程式 $\sin^2\theta-\sin\theta+1=a$ （$0\leqq\theta\leqq2\pi$）の解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べよ。

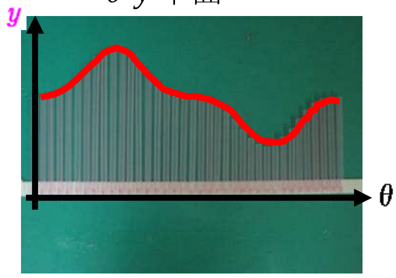
また、問題2においても、この立体模型の教具から、図形的意味を考えてみてください。

［問題３］

$y=\sin^3\theta+2$ （$0\leqq\theta\leqq2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

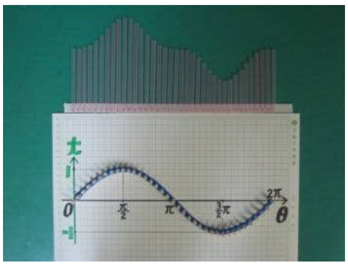
問題3においても、問題1と同様に立体模型の教具を作りました。
（$t=\sin\theta$ のグラフ上にある短い棒に、取り換え用のストローを差し込むだけで作れます。）

θy 平面



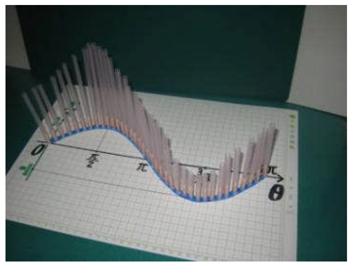
$y=\sin^3\theta+2$

θt 平面

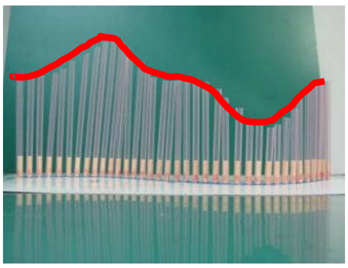


$t=\sin\theta$

全　体

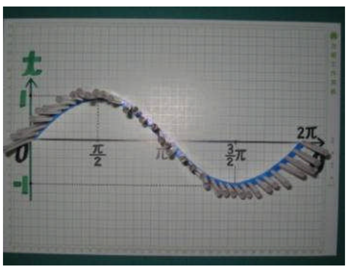


(1)　θy 平面を正面にして見た場合、 t 軸が消えたように見える。



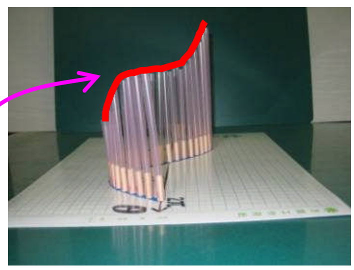
$y=\sin^3\theta+2$

(2)　θt 平面を正面にして見た場合、 y 軸が消えたように見える。



$t=\sin\theta$

(3)　ty 平面を正面にして見た場合、 θ 軸が消えたように見える。



$y=t^3+2$

$t=\sin\theta$ と置き換えをすると、
３次関数 $y=t^3+2$ に帰着できる
ことが見て分かります。

その他

［問題４］

$y=(x^2-2x)^2-(x^2-2x)+1$　（$0 \leqq x \leqq 2$）の最大値と最小値を求めよ。

［問題５］

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}+1$　（$0 \leqq x \leqq 2$）の最大値と最小値を求めよ。

［問題６］

$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x+1$　（$1 \leqq x \leqq 4$）の最大値と最小値を求めよ。

上記の問題４～６の解法の図形的意味が分かる立体模型の教具を作ってみませんか？

他にも、置き換えをすると別の関数に帰着できる問題の解法に関係する立体模型の教具を作ってみませんか？