知的好奇心をくすぐる(!?)教材１

『対数の性質を使った解法の間違いの不思議』

$\boxed{1}$　次の方程式を解け。

$$\log_5 x^2 = 6$$

「この問題のどこが知的好奇心をくすぐっているの？」
という疑問は忘れて、この問題を解いてみてください！
（制限時間１分）

・

・

・

・

・

・

・

・

・

・

どのように解きましたか？

解法 A

対数の定義　$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$　を利用すると与えられた方程式 $\log_5 x^2 = 6$ は、

$x^2 = 5^6$　となり、これを解くと、

$x = \pm 5^3$

$\therefore\ x = \pm 125$

解法 A と同じ答えになったと思いますが、
生徒の解答には次の解法 B も多くあります。

解法 B

対数の性質 $\log_a M^k = k \log_a M$　を利用すると与えられた方程式 $\log_5 x^2 = 6$　は、

$2\log_5 x = 6$　となり、これを解くと、

$\log_5 x = 3$

$x = 5^3$

$\therefore\ x = 125$

解法 A と解法 B の両方を生徒に紹介すると、
「アレッ？　どちらも正しく解いているように見える
けれど、答えが一致していない！エッ　どうして？
うーん　不思議だなぁー。」
という反応があるようです。

そこで、この疑問は一旦置いといて、

$\boxed{2}$　次の方程式を解け。

$$\log_5 x^3 = 6$$

という問題を生徒に解かせてみると、

解法A

定義　$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$　を利用して

$$\begin{aligned} \log_5 x^3 &= 6 \\ x^3 &= 5^6 \\ x &= 5^2 \\ \therefore\ x &= 25 \end{aligned}$$

解法B

性質 $\log_a M^k = k\log_a M$　を利用して

$$\begin{aligned} \log_5 x^3 &= 6 \\ 3\log_5 x &= 6 \\ \log_5 x &= 2 \\ x &= 5^2 \\ \therefore\ x &= 25 \end{aligned}$$

「アレッ？　今度はどちらも答えが一致している！
エッ　なぜ？　うーん　問題$\boxed{1}$と問題$\boxed{2}$の違いに
ヒントが隠れているのかも・・・。」
などの反応があるようです。

この

「なぜ？」

と思う気持ちが、知的好奇心をくすぐるのではないでしょうか？

【解　説】

問題 $\boxed{1}$ においては、解法Ａが正しいです。
解法Ｂの間違いは、

「$a>0$、$a\neq1$、$M>0$で、kが実数のとき、$\log_a M^k = k\log_a M$」という対数の性質を「$\log_a M^k = k\log_a M$」の部分だけを見て、「$M>0$　のとき」という条件を見落としたまま勝手に「 $\log_5 x^2 = 6$　ならば　$2\log_5 x = 6$　」としている点です。
つまり、条件「$x>0$のとき」がないのに、$\log_5 x^2$を「$\log_5 x^2 = 2\log_5 x$」と式変形している点が間違っているのです。
例えば、$2\log_5 7$は、$2\log_5 7 = \log_5 7^2$　とできますが、
$\log_5(-7)^2$は、$\log_5(-7)^2 = 2\log_5(-7)$　とできない（∵　真数は正）ように、
「真数は正」という**真数条件に注意**すると、
$\log_5 x^2$　の真数条件は　$x\neq0$　、$\log_5 x$　の真数条件は　$x>0$　なので
$\log_5 x^2$は「$\log_5 x^2 = 2\log_5 x$」と式変形できないことが分かると思います。
（「$\log_5 x^2 = 2\log_5|x|$　」としたり、「（ⅰ）$x>0$のとき　（ⅱ）$x<0$のとき」という場合分けをしたり、「$\log_5 x^2 = \log_{\sqrt{5}}|x|$　」としたりして解くことはできます。
ちなみに、$2\log_5 x$は「$2\log_5 x = \log_5 x^2$」と式変形できます。）

問題 $\boxed{2}$ においては、各自で教材研究をしてください！
（∵　自発的な取組による解決が人を成長させる！）

定理や公式等の間違えた利用をしないためにも、
「控え目で目立っていない部分(!?)（「真数条件」など）**」**
を軽視することなく、注意する必要があると思います。

最後に、
この問題が教材開発のヒントとなり、
「不思議」という体験から「なぜ？」という疑問が生まれ、
「あっ　そっかぁー　なるほど」という「感動・納得」に変わっていくような授業の展開を考えるときに、役立つことができれば嬉しく思います。

「不思議」という体験や「なぜ？」という疑問が生まれるような教材を作ってみませんか？

このページを見ていただき、ありがとうございました。